Epreuve d'admission en mathématiques et en physique:

Option Image et Son

Voici la matière que l'étudiant devra avoir assimilée avant d'entrer à l'IAD. Cette liste a été établie sur base des besoins que vous rencontrerez à l'IAD et du programme actuellement en vigueur dans l'enseignement secondaire en Communauté française :

- *La fonction du premier degré* $ax+b$
- *La fonction du second degré* ax^2+bx+c
- *Les fonctions sinus, cosinus et tangente*
- *La fonction logarithmique*
- *La fonction exponentielle*
- *La fonction y=a/x*
- *Les exposants*
- *Les relations dans les triangles rectangles*
- *La résolution des équations du premier degré et du second degré*
- *Les formules de surface (carré, rectangle, parallélogramme, triangle, disque)*
- *Les formules de volume (cube, parallélépipède rectangle, cylindre, sphère)*
- *Les concepts de base de la mécanique tels que la vitesse, l'accélération, le travail, l'énergie et la puissance*
- *Les règles de base en électricité, et principalement les liens entre voltage, ampérage, résistance et puissance.*
- *Les unités de longueur, de temps, de vitesse, d'accélération, d'angle plan, de masse, de surface, de volume, de force, d'intensité de courant, de résistance, de tension, d'énergie et de puissance*

L'étudiant devra être capable

- *D'exprimer un graphique x-y en mots*
- *D'interpréter un graphique x-y en nombres*
- *De déduire une formule mathématique à partir d'un graphique x-y*
- *De transcrire mathématiquement un énoncé simple*
- *De décrire le comportement d'une suite de nombres*
- *De transformer un tableau de données en une équation*
- *D'analyser graphiquement une fonction*
- *D'utiliser une proportion (règle de trois)*
- *De réduire ou de développer une relation donnée*
- *De déduire une relation d'autres relations*
- *De manipuler des fractions*
- *De préciser le sens d'une formule*
- *De convertir des unités*
- *De définir un concept simple tel que la vitesse*
- *De visualiser dans l'espace*

Pour vous aider à atteindre ces objectifs, voici un rappel des notions qui vous seront utiles et une série d'exercices qui vous permettront de vous mettre à niveau.

A. Mathématiques appliquées aux métiers du son et de l'image

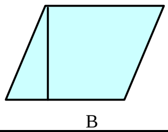
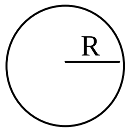
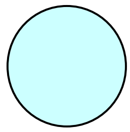
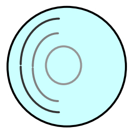
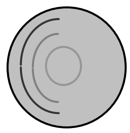
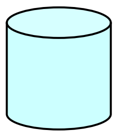
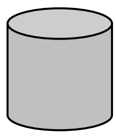
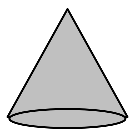
Chapitre I : Notions de Base

I. Alphabet grec

En mathématique, physique et chimie, on utilise régulièrement comme symboles certaines des vingt quatre lettres (fois deux) de l'alphabet grec car les vingt six lettres (fois deux) de l'alphabet latin ne suffisent pas. Le tableau ci-dessous reprend cet alphabet.

α	Α	alpha
β	Β	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	Ε	epsilon
ζ	Ζ	zêta
η	Η	êta
θ	Θ	thêta
ι	Ι	iota
κ	Κ	kappa
λ	Λ	lambda
μ	Μ	mu
ν	Ν	nu
ξ	Ξ	xi
ο	Ο	omicron
π	Π	pi
ρ	Ρ	rho
σ	Σ	sigma
τ	Τ	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ , φ	Φ	phi
χ	Χ	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

II. Géométrie de base

Figures	Formules	Dimensions
Aire du parallélogramme	$B \cdot h$	
Longueur de la circonférence	$2 \pi R$	
Aire du cercle	πR^2	
Aire de la sphère Aire de la calotte sphérique (de hauteur h)	$4 \pi R^2$ $2 \pi R h$	
Volume de la sphère	$\frac{4}{3} \pi R^3$	
Aire du cylindre	$2 \pi R^2 + 2 \pi R h$	
Volume du cylindre	$\pi R^2 h$	
Volume du cône	$\frac{1}{3} \pi R^2 h$	

Exercice 1
On coupe une sphère en deux parties identiques. Quel est le pourcentage d'augmentation de la surface des deux demi-sphères par rapport à la celle de la sphère entière ?
Réponse : augmentation=50%

Exercice 2
Si une sphère de rayon R est exactement située à l'intérieur d'un cube de base 2R, quel est le degré de remplissage du cube ?
Réponse : 0.52

III. Système international d'unités

Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur prise comme unité de mesure. Ainsi, une longueur peut être double, triple ... d'une autre. Par exemple, la longueur d'une feuille de papier est de 209 millimètres parce qu'on peut y reporter 209 fois la longueur de référence de un millimètre. La durée d'un cours est de 60 minutes parce qu'elle correspond à 60 fois une minute.

Par contre, à propos de température, les degrés Celsius ne sont pas une "mesure" de la température, car un corps à 40 °C n'est pas deux fois plus chaud que un corps à 20 °C et 0 °C ne correspond pas à l'absence de température. **Les degrés Celsius sont des repères de température** et non des mesures.

Au cours du temps, se sont édifiés des systèmes d'unités adaptés à la mesure de toutes les grandeurs connues et dont les définitions résultent d'accords entre les scientifiques (système métrique, 1799; système CGS, 1873; système Giorgi, 1901). Mis au point par la "Conférence générale des Poids et Mesures" en 1960, le **Système international d'unités (SI)** est cohérent car toutes les grandeurs utilisées en sciences dérivent de sept grandeurs fondamentales et de deux grandeurs supplémentaires qui servent d'unités de base:

- la **longueur** dont l'unité est le mètre (m);
- le **temps** dont l'unité est la seconde (s);
- la **masse** dont l'unité est le kilogramme (kg);
- la **quantité de matière** dont l'unité est la mole (mol);
- la **température** dont l'unité est le kelvin (K);
- l'**intensité de courant** dont l'unité est l'ampère (A);
- l'**intensité lumineuse** dont l'unité est la candéla (cd).

- l'**angle plan** dont l'unité est le radian (rad)
- l'**angle solide** dont l'unité est le stéradian (sr)

La définition de l'unité d'une grandeur fondamentale dépend souvent de l'histoire du concept. Elle résulte d'un accord pris au sein de la communauté des scientifiques.

Toute unité est représentée par un symbole qui a été choisi par une convention internationale et dont il faut respecter la forme.

Par exemple :	mètre	m
	kilogramme	kg
	seconde	s
	mole	mol

Ces symboles sont invariables et ne sont pas suivis d'un point comme l'est une abréviation. Ils commencent par une lettre minuscule sauf s'ils dérivent d'un nom propre. Dans ce cas, ils commencent par une majuscule.

Par exemple :	newton	N
	joule	J
	volt	V
	watt	W

Ces unités peuvent être précédées d'un préfixe pour les multiples ou les sous-multiples. Le tableau suivant donne les **préfixes imposés** avec leurs symboles et les facteurs multiplicatifs.

Sous-multiples			**Multiples**		
déci	d	10^{-1}	déca	da	10^{1}
centi	c	10^{-2}	hecto	h	10^{2}
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^{3}
micro	µ	10^{-6}	méga	M	10^{6}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{9}
pico	p	10^{-12}	téra	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	péta	P	10^{15}
atto	A	10^{-18}	exa	E	10^{18}

IV. Analyse dimensionnelle

Les grandeurs dérivées des grandeurs fondamentales sont liées à celles-ci par des **équations aux dimensions** qui indiquent sous une **forme symbolique conventionnelle** leur relation aux grandeurs fondamentales. En mécanique, les grandeurs fondamentales sont les unités de masse (M), de longueur (L) et de temps (T).

Par exemple, l'équation aux dimensions de la vitesse (v) qui est le rapport d'une variation de position sur une variation d'instant, c'est-à-dire d'une longueur sur un temps, s'écrit:

$$v = [L].[T]^{-1} \qquad \text{(m/s en SI)}$$

Si l'accélération (a) est le rapport d'une variation de vitesse sur un temps, son équation aux dimensions vaut :

$$a = [L].[T]^{-2} \qquad \text{(en m/s}^2\text{)}$$

Si la masse volumique (ρ) est le rapport d'une masse sur un volume, son équation aux dimensions est :

$$\rho = [M].[L]^{-3} \qquad \text{(en kg/m}^3\text{)}$$

Dans les sciences expérimentales, il est impératif que les quantités additionnées ou soustraites soient toujours de même dimension et que, de chaque côté d'un signe d'égalité, les quantités soient aussi de la même dimension.

Les quantités multipliées ou divisées ont les dimensions du produit ou du quotient.
Les exposants sont des nombres purs, dépourvus de dimension.

Exercice 1

Soit l'équation $y = 3.t$ qui exprime la position y d'un mobile en fonction du temps t.
Quelles sont les dimensions du **facteur 3** ?
Si l'équation $y = 3.t$ est écrite dans le système international, quelle est l'unité dans laquelle s'exprime le **facteur 3**? Quelle est sa signification physique?
Si on exprime la même relation avec y en kilomètres et t en heures, par quel nombre doit être remplacé le **facteur 3**?

Exercice 2

Quelles sont les dimensions des grandeurs physiques suivantes?

Nom	Formule éventuelle	Dimension
Aire		
Volume		
masse volumique	(masse par unité de volume)	
Fréquence	(nbre de cycles par unité de temps)	

Exercice 3

On sait depuis Newton que les corps s'attirent en fonction directe de leur masse et en fonction inverse du carré de la distance qui les sépare (loi de la gravitation universelle).

$$F = G \, \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Quelles sont les dimensions de la constante G?

Exercice 4

Dans un système d'unités où on emploie des mètres et des minutes, la relation entre la position (x) et le temps (t) est :

$$x = k / t$$

Si k = 4, quelles sont les dimensions de k et sa valeur dans le système international ?

V. Vecteurs et Scalaires

A. Définitions

Parmi les grandeurs physiques, on distingue
- les grandeurs scalaires
- les grandeurs vectorielles ou vecteurs.

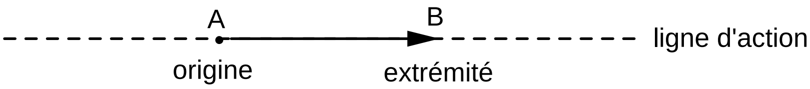
Une **grandeur scalaire** est une grandeur dont la définition ne fait intervenir **aucune notion de direction** (exemple: le temps, la masse, le travail...).

Une telle grandeur est entièrement définie par sa mesure et son unité. Un scalaire peut être positif ou négatif sauf impossibilité physique (par exemple, un temps négatif est dépourvu de signification).

Pour définir un **vecteur** (exemple: position, vitesse, accélération, force...), il ne suffit pas de donner sa **grandeur**, il faut aussi préciser son **orientation**. De ce fait, il faut quatre paramètres pour définir un vecteur :

- la **direction** ou ligne d'action du vecteur ;
- le **sens** : selon une même direction, il y a deux sens qui sont opposés ;
- le **point d'application** : point où le vecteur exerce son action ;
- la **grandeur** (ou module ou norme ou intensité) qui exprime la mesure avec son unité.

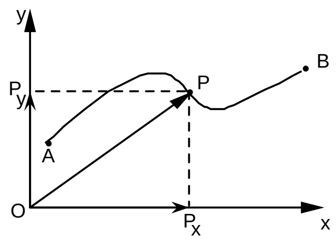
Un vecteur n'est donc ni positif, ni négatif. Il est représenté par un segment de droite orienté dont la longueur est proportionnelle à la grandeur du vecteur et dont l'origine est située au point d'application du vecteur. La droite qui sert de support au vecteur est généralement appelée **ligne d'action** du vecteur.



Pour bien montrer qu'il s'agit d'un vecteur, on utilise le sigle $\vec{AB}$. La valeur AB sans flèche est la norme (la grandeur ou le module) du vecteur.

B. Exemple de vecteur

Soit une trajectoire AB située sur une feuille de papier et qui passe à un instant donné par une position P



En choisissant un système d'axes xy dont l'origine est le point O, on peut définir la position P par le vecteur $\vec{OP}$. Les coordonnées du point P sont, à ce moment, P_X et P_Y. $\vec{OP}_x$ est la composante du vecteur $\vec{OP}$ suivant l'axe des x et $\vec{OP}_y$ est celle suivant l'axe des y.

VI. Trigonométrie

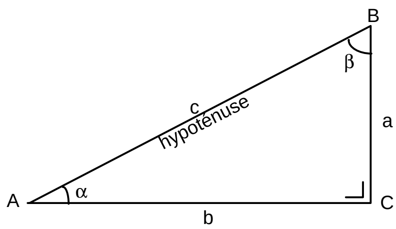
Lors de l'exemple précédent, on a vu que l'on pouvait décomposer un vecteur en ses composantes en traçant à partir de l'extrémité du vecteur des parallèles aux axes qui délimitent ces composantes. Pour déterminer, à partir de la grandeur du vecteur, la grandeur des composantes, il est nécessaire de faire appel à la trigonométrie et d'introduire les **notions de sinus, cosinus et tangente d'un angle**.

A. Théorème de Pythagore

Ces notions ont comme **point de départ le triangle rectangle** dans lequel le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse.

Pythagore (570 - 480 avant Jésus-Christ) a montré que dans le triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

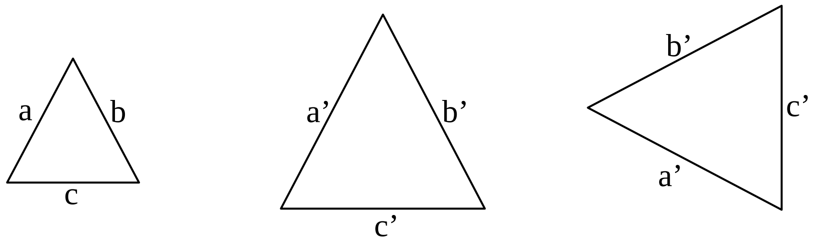


B. Egalité des angles et triangles semblables

Deux **angles** sont **égaux** si leurs côtés sont parallèles ou perpendiculaires.

Deux **triangles** sont **semblables** (des triangles semblables sont des triangles dont les angles sont égaux deux à deux) :

- si leurs angles sont égaux deux à deux;
- si leurs côtés sont respectivement parallèles;
- si leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.



On peut établir des relations de proportionnalité entre côtés homologues de triangles semblables :

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$$

C. Sinus – cosinus –tangente

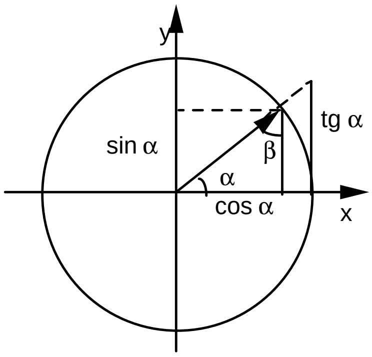
Par définition dans un triangle rectangle, pour un angle autre que l'angle droit :

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{a}{c} = \cos\beta}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{b}{c} = \sin\beta}$$

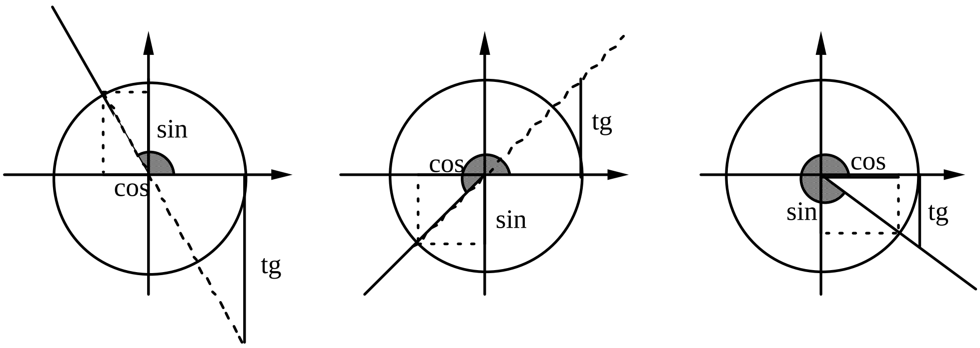
$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}}$$

Si, par ailleurs, dans une deuxième démarche, **on inscrit le triangle rectangle dans le cercle trigonométrique**, l'hypoténuse devient le rayon du cercle et sa longueur est choisie comme unité.



hypoténuse = rayon = 1

Dans les autres quadrants, la représentation est la suivante:



2ème quadrant 3ème quadrant 4ème quadrant

Dans le triangle rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique, l'application du théorème de Pythagore aboutit à la relation:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Pour exprimer la valeur des angles plans, plusieurs unités sont utilisées:

- le **degré** est l'angle plan qui, compris entre deux rayons, sous-tend un arc égal à 1/360 de circonférence.

- le **radian** est l'angle plan qui, compris entre deux rayons, sous-tend un arc de circonférence dont la longueur est égale au rayon de cette circonférence (1 rad = 57,3°).

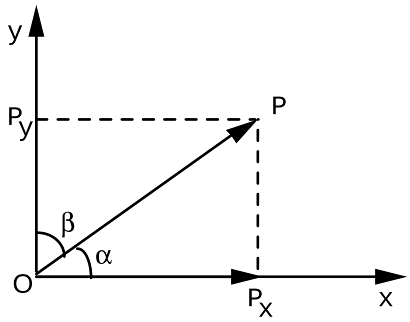
Dans un espace à trois dimensions, le **stéradian** est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale au carré du rayon de cette sphère.

Le tableau suivant présente quelques valeurs trigonométriques.

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
angle en radians	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos \alpha$	1	0,866	0,707	0,5	0
$\text{tg}\, \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$	1	$\sqrt{3} = 1{,}732$	∞

D. <u>Décomposition d'un vecteur en ses composantes</u>

Pour décomposer un vecteur en ses composantes, partant de l’extrémité du vecteur, on trace des parallèles aux deux axes. Celles-ci découpent sur les axes les deux composantes. En utilisant les relations de la trigonométrie, on peut exprimer la grandeur de celles-ci.



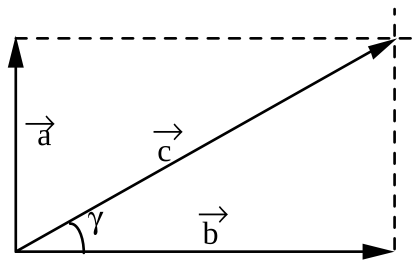
Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ se décompose en ses composantes OP_x et OP_y.

$$\boxed{OP_x = OP \cos \alpha = OP \sin \beta} \quad \text{car } \cos \alpha = \frac{OP_x}{OP} = \sin \beta$$

$$\boxed{OP_y = OP \sin \alpha = OP \cos \beta} \quad \text{car } \sin \alpha = \frac{OP_y}{OP} = \cos \beta$$

E. Composition de vecteurs - Règle du parallélogramme

Pour déterminer la résultante de deux vecteurs, on crée un parallélogramme en traçant des parallèles aux vecteurs à partir de leurs extrémités. Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires entre eux, la grandeur de la résultante peut être calculée par le théorème de Pythagore et son orientation dépend de l'angle γ.



$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}}$$

F. Formules de trigonométrie

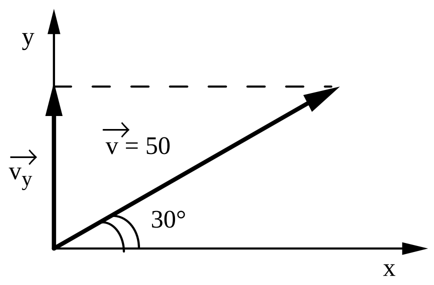
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x$

G. Exercices

Exercice 1

Quelle est la grandeur de $\vec{v}_y$, projection verticale du vecteur $\vec{v}$?



Formule : v_y

Réponse : v_y =

Exercice 2

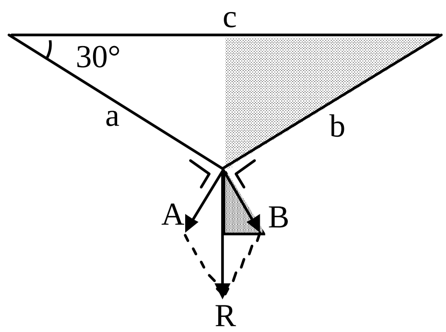
Sans utiliser de machine à calculer, si sin x = 0,8, que vaut cos x ?

Exercice 3

Sans utiliser de machine à calculer, si on sait que des côtés de longueur 3, 4, 5 définissent un triangle rectangle, quelles sont les valeurs de sinus, cosinus, tangente des angles de ce triangle?

Exercice 4

Deux vecteurs identiques de 1 cm de longueur A et B sont respectivement perpendiculaires aux côtés a et b d'un triangle isocèle dont la base c mesure 5 cm et dont les angles à la base sont de 30°. Quelle est la longueur de la résultante R?



Les triangles hachurés sont semblables car leurs côtés sont respectivement perpendiculaires. On peut donc y établir des proportions entre côtés homologues

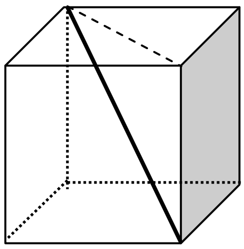
$$\frac{B}{b} = \frac{R/2}{c/2} \Rightarrow R = \frac{B.c}{b}$$

comme $\cos 30° = \dfrac{c/2}{b}$

$$R = \frac{B.c.\cos 30°}{c/2} = 1{,}732 \text{ cm}$$

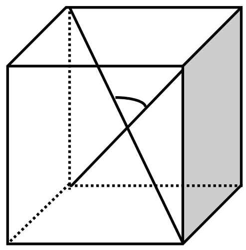
Exercice 5

Quelle est la longueur de la diagonale d'un cube dont l'arête est 1 cm? (par diagonale, on entend bien la droite qui joint un sommet à l'autre, en passant par le centre du cube)

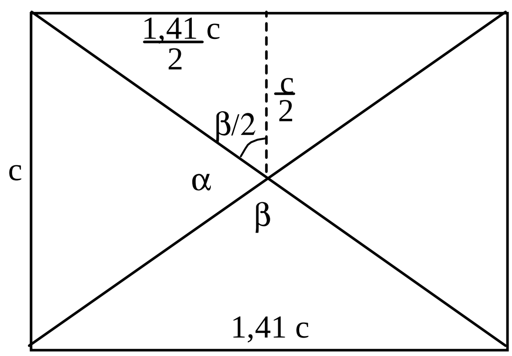


Exercice 6

Quels sont les angles que font entre elles les diagonales d'un cube de côté c?



Soit le rectangle qui découpe le cube d'arête à arête opposée:



$\beta = 109{,}47°$

$\alpha = 70{,}52°$

VII. Algèbre

A. Développement d'un binôme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

B. Résolution de l'équation du premier degré

L'équation **$y = ax + b = 0$** (où $a \neq 0$) admet une solution : $x = -\dfrac{b}{a}$

C. Résolution de l'équation du second degré

L'équation **$y = ax^2 + bx + c = 0$** (où $a \neq 0$) admet :

- deux solutions réelles si le réalisant (discriminant) **$b^2 - 4ac$** est positif :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- une solution (deux solutions réelles confondues) si le réalisant **$b^2 - 4ac$** est nul :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- aucune solution réelle si le réalisant **$b^2 - 4ac$** est négatif.

D. Règle de trois

On désigne sous le nom de « règle de trois », un mode de présentation particulier des propriétés de linéarité. Cette règle, connue depuis le VII^{ème} siècle par les mathématiciens hindous, constitue un moyen mnémotechnique utile pour résoudre certains problèmes de proportion.

En appliquant la « règle de trois », on utilise en fait une proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{c.b}{a}$$

Exemple 1 : 12 m de tissus coûtent 125 EUR, combien coûtent 2,25 m ?

La « règle de trois » s'écrit :

12 m $\Rightarrow$ 125 EUR

1 m $\Rightarrow$ $\frac{125}{12}$ EUR

2,25 m $\Rightarrow$ $\frac{125\,.\,2,25}{12}$ = 23,44 EUR

Exemple 2 : 3 ouvriers fabriquent 7 pièces en 42 min. Combien de pièces sont fabriquées par 10 ouvriers en 3 heures ?

On procède en deux étapes :

3 ouvriers $\Rightarrow$ 7 pièces en 42 min

1 ouvrier $\Rightarrow$ $\frac{7}{3}$ pièces en 42 min

10 ouvriers $\Rightarrow$ $\frac{7\,.\,10}{3}$ pièces en 42 min

10 ouvriers $\Rightarrow$ $\frac{7\,.\,10}{3\,.\,42}$ pièces en 1 min

10 ouvriers $\Rightarrow$ $\frac{7\,.\,10\,.\,180}{3\,.\,42}$ pièces en 180 min = 100 pièces

E. Exercices

Exercice 1

Effectuer les opérations suivantes :

$4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$

$6\sqrt{3} - \sqrt{27} =$

$\sqrt{3}.\sqrt{15} =$

$\sqrt[3]{18}\,.\,\sqrt[3]{4} =$

$(2\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 4) =$

$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(5\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$

$\frac{2a+b}{10} + \frac{a-6b}{15} =$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4} =$$

$$\frac{2}{3a-1} - \frac{3}{2a+1} =$$

$$\frac{3}{x+y} - \frac{5}{x^2-y^2} =$$

<u>Exercice 2</u>

Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle dont l'aire est 26 cm² et le périmètre 21 cm ?

$$\text{aire} = B \,.\, h = 26 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{26}{h}$$

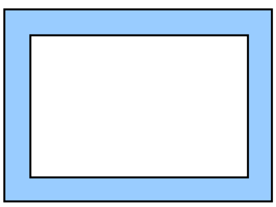
$$\text{périmètre} = 2B + 2h = 21 \quad \Rightarrow \quad 2\,\frac{26}{h} + 2h = 21 \quad \Rightarrow \quad \frac{52}{h} + \frac{2h^2}{h} = 21$$

$$\Rightarrow \quad 2h^2 - 21h + 52 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{+21 \pm \sqrt{21^2 - 4.2.52}}{2.2} = 6{,}5 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad B = 4 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 6{,}5 \text{ m}$$

<u>Exercice 3</u>

Un jardin rectangulaire a pour dimension 35 m sur 40 m. On désire y créer un chemin de largeur constante qui en fait le tour à l'intérieur. Déterminer la largeur de ce chemin si on désire qu'il reste 10,5 ares cultivables ?



1 are = 100 m²

$$(40 - 2x)(35 - 2x) = 1050 \quad \Rightarrow \quad 1400 - 70x - 80x + 4x^2 = 1050$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 150x + 350 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 75x + 175 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{+75 \pm \sqrt{75^2 - 4.2.175}}{2.2} = 35 \quad \text{ou} \quad 2{,}5$$

⇒ 35 m étant impossible, la largeur du chemin doit être de 2,5 m

Exercice 4 Problème de mise en équation :

Soit x l'âge actuel d'un père. Exprimer l'age actuel de son fils qui, il y a 2 ans, avait le tiers de l'âge de son père.

Réponse :

Exercice 5 Problème de mise en équation :

Soit x l'âge actuel d'un père. Exprimer l'age actuel de sa fille qui dans 5 ans aura le quart de l'âge de son père.

Réponse : Dans 5 ans, l'âge du père sera x + 5 et l'âge de la fille sera $\frac{x+5}{4}$. Aujourd'hui, l'âge de la fille est $\frac{x+5}{4} - 5$.

Exercice 6 Problème de mise en équation :

Soit deux garçons, Pierre et Jacques. Pierre a actuellement 6 ans de plus que Jacques. Il y a dix ans, Pierre avait le double de l'âge de Jacques. Quels sont les âges de Pierre et Jacques ?

Réponse
$\Rightarrow$ J = 16 ans
$\Rightarrow$ P = 22 ans

IX. Les exposants

A. Utilisation

Dans les utilisations scientifiques, on est amené à effectuer des opérations sur des nombres très grands ou très petits. Dans ces conditions, la notation exponentielle simplifie la notation des calculs.

Par exemple, la vitesse de la lumière c = 300.000.000 m/s
c = 3.10^8 m/s.

De même, la charge de l'électron e = 0,00000000000000000016 coulomb
e = $1,6.10^{-19}$ coulomb

Remarque

Certaines calculettes qui emploient la notation exponentielle utilisent un code particulier. Suivant le cas, l'exposant est présenté à droite de l'écran (par ex. : $0{,}24.10^9$ est écrit 0,24 09) ou encore il est précédé par la lettre E (par ex. : $1{,}2.10^{-6}$ est écrit 1,2 E –06. Cette écriture schématique ne doit pas faire oublier le sens précis de l'exposant qui est dans tout les cas une puissance de 10.

Une erreur fréquente lorsque on introduit dans une calculette des nombres en notation exponentielle est la suivante. Pour écrire 10^9, on frappe les touches 10e ^{9} et le résultat obtenu est erroné (on obtient en réalité 10^{10}). Pour ne pas faire d'erreur, il faut se souvenir que $10^9 = 1.10^9$ et introduire la séquence 1e ^{9}.

B. Rappel du calcul des exposants

Signification de la terminologie

Par définition $a^5 = a . a . a . a . a$ a est la **base** et 5 l'**exposant**

a^n représente le produit de n facteurs égaux à a. On voit que cette définition n'a de sens que si n est un nombre entier positif.

Produit de deux puissances d'un même nombre :

Règle : $\boxed{\mathbf{a^n . a^p = a^{n+p}}}$

Exemple : $a^3 . a^2 = \underbrace{a . a . a}_{} . \underbrace{a . a}_{} = a^{3+2}$

$2.10^{-2} . 3.10^3 = 2.3.10^{-2+3} = 6.10^1 = 60$

Quotient de deux puissances d'un même nombre :

Règle : $\boxed{\mathbf{\dfrac{a^p}{a^n} = a^{p-n}}}$

Exemple : $\dfrac{\mathbf{a^5}}{\mathbf{a^3}} = \dfrac{a . a . a . a . a}{a . a . a} = a . a = a^{5-3}$

$\dfrac{\mathbf{a^3}}{\mathbf{a^5}} = \dfrac{a . a . a}{a . a . a . a . a} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^{5-3}}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^2}}$

par conséquent $\boxed{\mathbf{a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}}}$

Cas particulier : si p = n, on obtient

$\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; d'où $\boxed{\mathbf{a^0 = 1}}$

Puissance d'une puissance :

Règle : $\boxed{(a^n)^p = a^{n.p}}$

Exemple : $(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4.3} = a^{12}$

Extraction d'une racine :

Par définition : $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ si } a = b^n}$

On appelle racine n^ème^ d'un nombre a, tout nombre réel dont la n^ème^ puissance est a. L'extraction d'une racine est donc l'opération inverse de l'élévation à une puissance.

Deux cas se présentent suivant la parité de l'indice n :

n est pair : a > 0 : il existe deux racines $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$
a = 0 : une seule racine 0
a < 0 : pas de racine réelle

n est impair a > 0 : une seule racine $\sqrt[n]{a}$
a = 0 : une seule racine 0
a < 0 : une seule racine $-\sqrt[n]{|a|}$ on n'écrit pas $\cancel{\sqrt[3]{-8} = -2}$ mais $-\sqrt[3]{8} = -2$

Règle $\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}}$, même si p n'est pas divisible par n.

Exemple :

$$a^{3/4} = \sqrt[4]{a^3}$$

$$8^{4/3} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$$

$$\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{3.4}} = 2^{3.4/3} = 2^4 = 16$$

$$16^{-0,75} = 16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Addition et soustraction

On ne peut effectuer la somme ou la différence de nombres écrits en notation exponentielle que s'ils sont exprimés dans la même base **et** affectés du même exposant.

Exemple : $5.10^3 - 2.10^3$ peut se réduire en 3.10^3.

Autres opérations autorisées

Si les bases sont différentes mais que les exposants sont identiques, on peut simplifier les multiplications ou les divisions suivantes :

$$a^p.b^p = (a.b)^p \quad \text{ou} \quad a^p/b^p = (a/b)^p$$

Exemples : $2^2 . 3^2 = 6^2$

C. Exercices de calcul avec exposants

Pour être efficaces, les exercices suivants doivent être résolus sans l'aide d'une machine à calculer.

1. $-(9^2) =$
2. $(-9)^2 =$
3. $-(-9)^2 =$
4. $(-9)^{1/2} =$
5. $(-8)^{1/3} =$
6. $81^{1/2} =$
7. $81^{3/4} =$
8. $16^{3/2} =$
9. $(-32)^{4/5} =$
10. $(a^{-1/2})^2 =$
11. $(81\ a^4/b^8)^{-1/4} =$
12. $\dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} =$
13. $10^0 =$
14. $4^0 =$
15. $4 \,.\, a^0 =$
16. $4\,(a + 1)^0 =$
17. $125^{-1/3} =$
18. $(-125)^{-1/3} =$
19. $-(-1/32)^{4/5} =$
20. $(a^{2n}.\ B^{3m})/(a^{3n}.\ b^{2m}) =$
21. $16^{x+1} / 4^{x-1} =$
22. $(a^{1/2} + a^{-1/2})^2 =$
23. $(a - 3b^{-2}).(2a^{-1} - b^{-2}) =$

Effectuer sans utiliser d'exposants négatifs ou nuls

24. $\left(\frac{81a^4}{b^8}\right)^{-1/4} =$

25. $(a - 3b^{-2})(2a^{-1} - b^2) =$

26. $\left(\frac{a^{1/2}b^{2/3}}{c^{3/4}}\right)^6 \left(\frac{c^{1/2}}{a^{1/4}b^{1/3}}\right)^9 =$

27. $10^{2,5} =$

28. $5.10^3 + 2.10^3 + 3.10^3 =$

29. $10^4 + 10^4 =$

30. $10^4 - 10^2 =$

31. $10^{-6} - 10^{-5} =$

32. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

33. $10^2 - 5^4 =$

34. $(\sqrt{2} - 1)^2 =$

X. Les logarithmes

A. Définition

Soit une **progression arithmétique** de raison 1 : (Une progression arithmétique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme s'obtient en additionnant au terme précédent une valeur constante appelée **raison** ou en soustrayant au terme suivant la même raison) :

$-\infty$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…	$+\infty$

Parallèlement, on peut établir une **progression géométrique** de raison 10 : (Une progression géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par une valeur constante appelée **raison** ou en divisant le terme suivant par la même raison):

0	…	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	…	$+\infty$
$10^{-\infty}$	…	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	…	10^{∞}

On peut faire correspondre les deux progressions en alignant le terme 0 de la progression arithmétique (de raison 1) avec le terme 1 de la progression géométrique (de raison 10).

$-\infty$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…	$+\infty$
0	…	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	…	$+\infty$
$10^{-\infty}$	…	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	…	10^{∞}

0n appelle **logarithme de base 10** ou **logarithme décimal** d'un nombre de la progression géométrique, le nombre correspondant de la progression arithmétique.

$$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$
$$\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$$

L'utilisation d'une progression géométrique de raison e (e est un nombre transcendant, aussi célèbre en sciences que π. Il vaut 2,718281828…) conduit à la définition des **logarithmes népériens**.

$-\infty$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…	$+\infty$
0	…	0,018	0,050	0,135	0,368	1	2,71	7,39	20,1	54,6	…	$+\infty$
$e^{-\infty}$	…	e^{-4}	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	e^{0}	e^{1}	e^{2}	e^{3}	e^{4}	…	e^{∞}

$$\log_e 7{,}38906 = \log_e e^2 = 2$$
$$\log_e 0{,}04979 = \log_e e^{-3} = -3$$

Par définition**, le logarithme d'un nombre N, dans une base a, est l'exposant dont il faut affecter la base pour obtenir ce nombre**.

$$\log_a N = n \quad \text{si } a^n = N \qquad (N > 0\ ;\ a > 0 \text{ et } a \neq 1)$$
$$\log_{10} 100 = 2 \quad \text{si } 10^2 = 100$$
$$\log_e 7{,}39 = 2 \quad \text{si } e^2 = 7{,}39$$

Comme on a pu le remarquer dans l'association des progressions, **seuls les nombres positifs possèdent un logarithme.**

Dans la pratique des sciences, on ne rencontre que deux types de logarithmes:

- les logarithmes de base 10, appelés logarithmes décimaux et notés en écriture courante ainsi que sur le clavier des machines à calculer "log".
- les logarithmes de base e, appelés logarithmes népériens ou naturels et notés habituellement "ln" (parfois Log, avec un L majuscule).

Les logarithmes décimaux

Le logarithme décimal d'un nombre est l'exposant dont il faut affecter la base 10 pour obtenir ce nombre.

$n = \log N$ si $N = 10^n$ ou encore $\log 10^n = n$.
$2{,}301 = \log 200$ si $200 = 10^{2{,}301}$ $\log 10^{2{,}301} = 200$

La partie du logarithme située devant la virgule est la **caractéristique**. Elle peut être positive ou négative. Elle fixe la place de la virgule.

$1 \Rightarrow \times 10$
$3 \Rightarrow \times 10^{+3}$
$-2 \Rightarrow \times 10^{-2}$

La partie du logarithme située derrière la virgule est la **mantisse**. Elle ne peut être que positive. Tous les nombres constitués d'une même suite de chiffres ont la même mantisse. Par exemple, log 3450, log 345, log 3,45, log 0,0345, … ont tous la même mantisse 0,53782..

$\log 3450 = \log (3{,}45.10^3) = 3 + 0{,}53782 = 3{,}53782$
$\log 345 = \log (3{,}45.10^2) = 2 + 0{,}53782 = 2{,}53782$
$\log 3{,}45 = \log (3{,}45.10^0) = 0 + 0{,}53782 = 0{,}53782$
$\log 0{,}0345 = \log (3{,}45.10^{-2}) = -2 + 0{,}53782 = -1{,}46218$

Dans le dernier cas, il faut être conscient que pour -1,46218 (nombre négatif), la mantisse qui ne peut être que positive est (-2) + 1,46318 = 0,53782

Les logarithmes népériens

Le logarithme népérien d'un nombre est l'exposant dont il faut affecter la base e pour obtenir ce nombre. (e est un nombre transcendant qui vaut environ 2,718281828...)

$n = \ln N$ si $N = e^n$ ou encore $\ln e^n = n$.

Ces logarithmes s'introduisent naturellement dans beaucoup de problèmes de mathématique et ont été définis pour la première fois par Neper (1614), qui leur a laissé son nom.

Passage des logarithmes décimaux aux népériens

Il n'y a qu'un facteur multiplicatif qui distingue les logarithmes décimaux des logarithmes népériens.

Règle de transformation : $\log N = \log e . \ln N = 0{,}4343 . \ln N$
ou
$\ln N = \ln 10 . \log N = 2{,}303 . \log N$

Plus généralement, pour transformer un logarithme de base a en un logarithme de base b, on utilise la relation :

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N$$

B. Propriétés des logarithmes

Les logarithmes sont analogues à des exposants, ils obéissent aux mêmes règles de calcul que ceux-ci. Ces règles sont valables pour tous les logarithmes, quelle que soit leur base.

Produit $\boxed{\log A.B = \log A + \log B}$

Par exemple $\log 2 \, . \, 3 = \log 2 + \log 3$

$\log 30 = \log 10 + \log 3$

Quotient $\boxed{\log \frac{A}{B} = \log A - \log B}$

Remarque importante : logarithme des fractions. Puisque, quelle que soit la base, le logarithme de 1 est égal à 0, on a (si $A \neq 0$):

$$\log \frac{1}{A} = \log 1 - \log A$$

$$\boxed{\log \frac{1}{A} = -\log A}$$

Par exemple $\log \frac{1}{2} = -\log 2$

$\ln 0{,}1 = -\ln 10$

Puissance $\boxed{\log A^n = n \, . \log A}$

Cette propriété s'applique quel que soit n, positif, négatif ou fractionnaire.

Par exemple $\log 9 = 2 \log 3$

$\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$

$\ln \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} \ln a$

Somme ou différence

Il n'existe pas de formule pour transformer le logarithme d'une somme ou d'une différence ; log (A+B) ou log (A-B) ne peuvent pas être modifiés, sinon en effectuant la somme ou la différence entre parenthèses.

C. Exercices de calcul avec logarithmes

En connaissant quelques valeurs approchées, il est possible d'effectuer sans calculette les calculs de logarithmes suivants :

log 2 = 0,301	**ln 2 = 0,693**	**e^{-1} = 0,368**
log 2,71 = 0,4343	**ln 3 = 1,10**	**e^{-2} = 0,135**
log 3 = 0,477	**ln 10 = 2,303**	**e^{-3} = 0,050**

1. log 4 =
2. log 5 =
3. log 6 =
4. log 7 = 0,845 $\approx$ log $\sqrt{50}$ =
5. log 8 =
6. log 9 =
7. log 10
8. log 20 =
9. log 200 =
10. log 500 =
11. log 0,2 =
12. log 0,05 =
13. log 0,04 =
14. log 0,008 =
15. log 0,00008 =
16. Si log x = 1,7 $\rightarrow$ x =
17. Si log x = 2,3 $\rightarrow$ x =
18. Si log x = - 0,3 $\rightarrow$ x =
19. Si log x = - 1,7 $\rightarrow$ x =
20. log (-1) =

21. $\ln e^{3/2} =$

22. $\ln 100 =$

23. $\ln e^{-1} =$

24. $\ln 0,5 =$

25. $\ln 0,25 =$

26. Si $\log 3 = 0,477 \rightarrow \ln 3 =$

27. Si $\ln x = -4 \rightarrow \log x =$

28. $\log (e^2) =$

29. $\ln (10^{-1}) =$

D. Application à la physique

1. Application à la physique - Niveaux acoustiques et électriques

L'utilisation des unités d'intensité acoustique (W/m^2) ou de pression acoustique (Pa) n'est pas très pratique en raison de l'étendue énorme de la plage couverte. Pour comprimer cette échelle, il est très aisé d'employer les logarithmes. Par ailleurs, la loi de Weber-Fechner (± 1850) montre que la sensation auditive croît de manière logarithmique avec l'intensité acoustique. On retrouve aussi la même utilisation des logarithmes pour certaines grandeurs électriques des systèmes électroacoustiques.

On introduit donc une autre façon de mesurer ces grandeurs par l'utilisation du décibel (dB). Celui-ci n'est pas une unité au sens strict du terme, mais un nombre pur sans dimension. Le niveau en décibel est défini comme étant égal à 10 fois le **logarithme en base 10 du rapport d'une puissance P_1 à une puissance P_2**. Il sera donc d'application aussi bien en acoustique qu'en électro-acoustique.

$$\boxed{L = 10 \log \frac{P_1}{P_2}}$$

Comme l'intensité acoustique (puissance acoustique par unité de surface) est proportionnelle au carré de la pression acoustique ($P_a = p^2/Z_a$) et que la puissance électrique est proportionnelle au carré de la tension électrique e ($P_e = e^2/Z_e$), les niveaux en décibel sont donnés pour l'intensité acoustique, la pression acoustique ou la tension électrique par une des relations suivantes :

$$\boxed{L_I = 10 \log \frac{I_1}{I_2}} \qquad \boxed{L_p = 20 \log \frac{p_1}{p_2}} \qquad \boxed{L_é = 20 \log \frac{e_1}{e_2}}$$

Ainsi définis, les niveaux sont des grandeurs qui ne donnent que le rapport entre deux grandeurs acoustiques ou électriques ; ce sont des **décibels relatifs**.

Si on introduit une grandeur de référence (qu'il faut spécifier), on définit le niveau absolu de la grandeur en **décibels absolus**. La grandeur de référence est souvent normalisée.

Pour définir le **niveau d'intensité acoustique L_I**, exprimé en décibels, on choisit comme référence, l’intensité acoustique dans l'air au seuil normalisé d'audition à 1.000 Hz, $I_O = 10^{-12}$ watt par mètre carré.

$$\boxed{L_I = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}}$$

Pour définir le **niveau de pression acoustique L_P**, exprimé en décibels, on choisit comme référence, la pression acoustique dans l'air au seuil normalisé d'audition à 1.000 Hz, $p_O = 2.10^{-5}$ pascal.

$$\boxed{L_P = 20 \log \frac{p}{2.10^{-5}}}$$

Pour définir le **niveau de puissance électrique Lp**, exprimé en décibels, on choisit comme référence, une puissance électrique $P_o = 1$ watt.

$$\boxed{L_P = 10 \log \frac{P}{1}}$$

<u>Exercices de calcul en dB</u>

1. Que valent l’intensité acoustique, la pression acoustique i les niveaux acoustiques ou électriques atteignent 100 décibels ?
réponse : I = 10-2 W/m² et p = 2 Pa

2. Quel est (en dB) le niveau d’intensité acoustique d'un son de 2.10^{-8} watt/m^2 ? (effectuer le calcul sans machine à calculer).

3. Si on augmente le niveau acoustique de 30 décibels, comment varient l'intensité acoustique (exprimée en watt/m2) et la pression acoustique d’un son (exprimée en Pa) ?
Réponse : $\frac{I'}{I} = 10^3 \qquad \frac{p'}{p} = \sqrt{10^3} = 31,5$

4. Un violoniste jouant seul produit un son dont le niveau acoustique est 80 dB. Combien de décibels produisent 5 violonistes jouant à l’unisson ? Combien faut-il de violonistes pour atteindre 95 dB ?
Réponse : 87 dB et environ 32 violonistes.

5. L’égalisateur d’une bande de fréquences d’un amplificateur a son curseur gradué de + 15 dB à – 15 dB. Par quelle facteur modifie-t-on l’intensité du son lorsqu’on passe de la position + 15 dB à – 15 dB ?
réponse : 10^3

Chapitre II : Les Fonctions

I. Introduction

Décrire quantitativement la relation qui existe entre deux grandeurs est une des tâches importantes auxquelles se trouvent confrontés les scientifiques. Cette relation peut s'exprimer de trois façons :

- sous la forme d'un tableau des mesures ;
- sous la forme d'un graphique
- sous la forme d'une équation mathématique.

Que ce soit pour vérifier des théories (déduction) ou pour en créer de nouvelles à partir de données expérimentales (induction), il est indispensable qu'une formulation mathématique adéquate soit établie pour représenter le phénomène étudié.

Généralement, l'écriture prend la forme explicite :

$$y = f(x)$$

où y, appelée variable dépendante, est une grandeur qui *est fonction de* la grandeur x, appelée variable indépendante.

Comme les phénomènes étudiés en sciences sont le plus souvent concrets et continus, on supposera, sauf exception, que les fonctions $y = f(x)$ ne font intervenir que des grandeurs appartenant à l'ensemble des nombres réels et qu'elles sont définies, continues et dépourvues de singularités dans le domaine considéré.

La très grande majorité des relations entre grandeurs physiques peut être traduite en équations mathématiques élémentaires,

- du premier degré (relations linéaires qui se représentent graphiquement par des droites)
- du deuxième degré (relations quadratiques qui se représentent graphiquement par des paraboles, des hyperboles ou des ellipses)
- exponentielles ou logarithmiques.

II. Fonction du premier degré : f(x) = a.x + b

La formulation explicite d'une relation linéaire (la représentation graphique de cette fonction est une droite) entre deux grandeurs est

$$\boxed{y = a . x + b}$$

Le facteur a s'appelle "coefficient angulaire" ou encore "pente" de la droite.

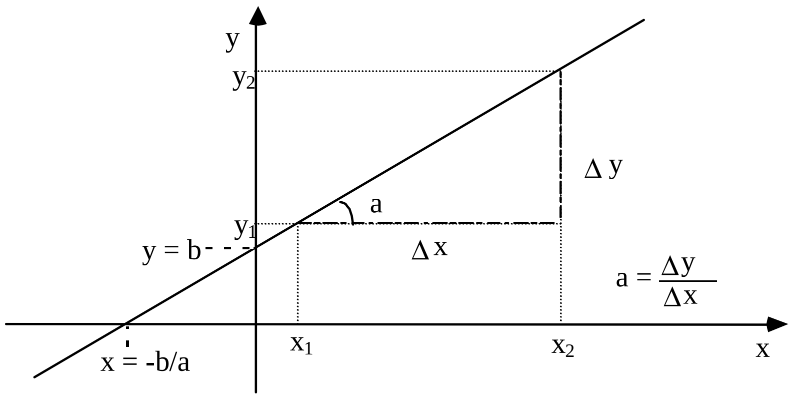
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- si a est positif, la fonction est croissante;
- si a est négatif, elle est décroissante.

Le terme b est appelé "ordonnée à l'origine" de la droite.

Lorsque x = 0, la droite coupe l'axe y en un point y = b.

Lorsque y = 0, la droite coupe l'axe x en un point $x = -\frac{b}{a}$.



Cas particulier

Lorsque a = 0, la droite est parallèle à l'axe x, à une distance y = b.

Lorsque b = 0, la droite passe par l'origine des axes de coordonnées.

Les droites verticales répondent à une équation particulière x = c. Cette verticale coupe l'axe des abscisses au point c.

Deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de la pente de la première par l'inverse de la deuxième vaut – 1. Il en résulte que le coefficient angulaire a_2 de toutes les droites perpendiculaires à la droite d'équation $y = a_1x + b$ est $a_2 = -1 / a_1$.

y = 3x + 2 et y = - 3x + 4 sont les équations de droites perpendiculaires car (3) . (–1/3) = –1

<u>Exercice résolu 1</u> :

Le point de départ est la connaissance de l'équation de la droite

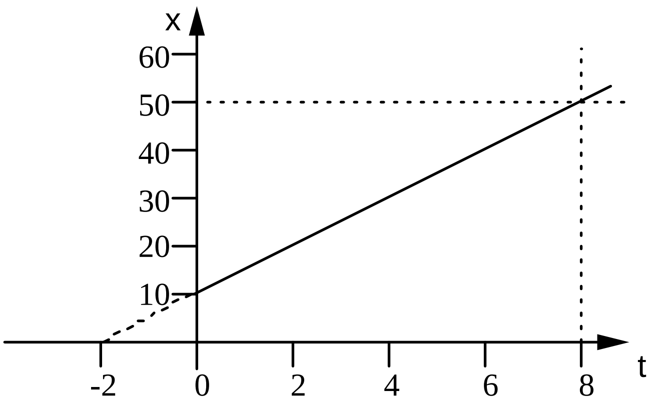
Dans un mouvement rectiligne uniforme, la position (x) est une fonction linéaire du temps (t) dont l'équation est :

$$x = x_o + v \cdot t$$
$$x = 10 + 5 \cdot t$$

Représenter graphiquement la position en fonction du temps, pour t compris entre 0 et 8 secondes.

Puisqu'il suffit de deux points pour tracer une droite, le graphique est facile à obtenir.

t	x
0	10
2	20
4	30
6	40
8	50



L'ordonnée à l'origine est x_o et correspond à la position occupée à t = 0 (+10 mètres).
La pente de la droite est v. Sa valeur est égale à + 5 et représente la vitesse du mobile (5 m/s) (voir plus loin le chapitre sur les dérivées).

La droite coupe l'axe des abscisses au point ($x = 0$, $t = -\frac{b}{a}$), c'est-à-dire lorsque $t = -\frac{10}{5} = -2$s.

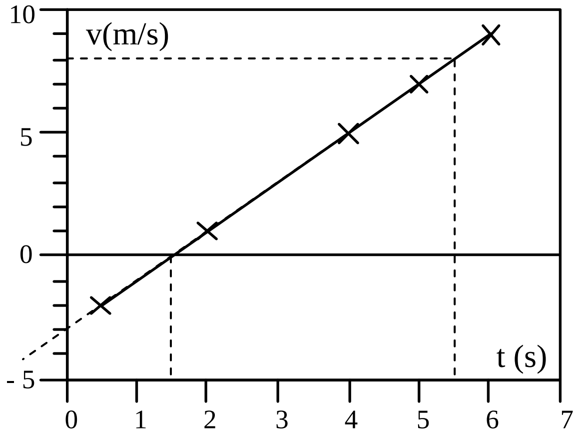
Cette valeur négative de t doit être comprise dans le sens que, si on fait l'hypothèse que le mobile est en mouvement depuis un temps indéterminé à vitesse constante, il se trouvait à l'origine de l'axe mesurant les positions (au point x = 0), deux secondes avant le début de la mesure.

<u>Exercice résolu 2</u> :

On part du tableau des valeurs et/ou du graphique et on demande de déterminer l'équation de la droite, c'est-à-dire trouver les constantes a (pente) et b (ordonnée à l'origine).

<u>Données expérimentales</u> : la mesure de la vitesse en fonction du temps pour un mobile en mouvement rectiligne uniformément accéléré a donné les résultats suivants :

t	v
0,5	- 2
2,0	+1
4,0	+5
5,0	+7
6,0	+9



Lorsque le tableau de valeurs a été dressé au moyen de mesures réelles, il est inéluctable (ce n’est pas le cas ici) qu'une dispersion des points expérimentaux, due aux imperfections de l'appareillage, se manifeste sur le graphique.

Le coefficient angulaire ne doit pas dans ce cas être déterminé au moyen de deux couples de points expérimentaux, ceux-ci étant entachés d'imprécision, mais à partir de deux couples issus de la droite idéale qui passe au mieux à travers les points expérimentaux.

Le tracé de cette droite idéale, en toute rigueur, se trouve par un procédé mathématique, appelé "Méthode des moindres carrés".

En pratique, on se contente souvent d'une approximation graphique qui consiste, après avoir porté sur papier l'ensemble des points expérimentaux, à tracer la droite qui minimise leurs écarts positifs ou négatifs par rapport à celle-ci. Si un point s'écarte manifestement trop de l'alignement des autres, il faut suspecter une erreur expérimentale et, jusqu'à vérification, ne pas en tenir compte dans le tracé ni les calculs.

Calcul de la pente : $a = \dfrac{8-0}{5{,}5-1{,}5} = +2 \text{ m/s}^2$

Calcul de l'ordonnée à l'origine : la prolongation de la droite coupe l’axe des ordonnées au point
b = - 3 m/s

L’équation est donc : $v = 2.t - 3$

<u>Détermination d’un exposant quelconque</u>

Lorsqu'on sait qu’une fonction est du type $y = a.x^b$ mais que l'exposant b est inconnu, la détermination de celui-ci se fait de la façon suivante : à partir des valeurs expérimentales x et y, on construit un graphique avec en ordonnée le logarithme de y et en abscisse le logarithme de x.

Dans le cas où la fonction est du type $y = a . x^b$, on obtient une droite. En effet, en passant au logarithme (népérien ou décimal, peu importe) :

$$y = a.x^b \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + b. \ln x.$$

Si, dans un graphique, on porte ln y en fonction de ln x, on trouve une droite dont la pente est égale à b (l'exposant recherché), et dont l'ordonnée à l'origine est égale à ln a.

<u>Exercices sur la droite</u>

1. Trouver l'équation des droites passant par les points (x,y) suivants :

a. (1,2) et (3,1) Réponse : $y = -0{,}5\,x + 2{,}5$

b. (0,-3) et (5,0) Réponse : $y = \frac{3}{5}x - 3$

c. (-2,-7) et (1,-1) Réponse : $y = 2\,x - 3$

d. (0, 0) et (1,-2) Réponse : $y = -2\,x$

2. Un avion vole à une altitude h_o. Au temps t = 0, il amorce une descente régulière qui doit l'amener jusqu'au sol ; son altitude h varie linéairement en fonction du temps t. Trouver l'altitude de départ et la durée de la descente en fonction des données suivantes :

temps (minutes)	2	8	14	24
altitude (mètres)	2800	2200	1600	600

Réponse : h_o = 3000 m t = 30 minutes

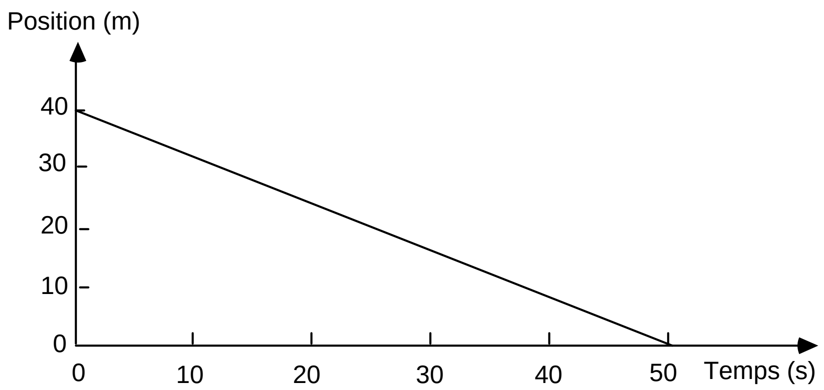
3. Des mesures expérimentales assez imprécises ont déterminé la force F qui est exercée par un électroaimant en fonction du courant I qui le traverse. On sait que cette équation est du premier degré : F = a.I +b.

I (A)	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
F (N)	2,5	3	4,0	4,0	5,0	5,5	6,5	3,0	7,0	7,5	9,0	8,5

a) tracer le graphique de F en fonction de I.
b) faire passer la meilleure droite possible (méthode visuelle) à travers les points expérimentaux.
c) sélectionner deux points de cette droite pour trouver les coefficients a et b de l'équation.

4. Une première droite passe par les points (x,y) : (2,4) et (4,8).
Une seconde droite possède une pente égale à -2 et une ordonnée à l'origine égale à 10.
En quel point ces deux droites se croisent-elles ?
Réponse : x=2.5 et y=5

5. Le graphique ci-dessous représente la position d'un mobile en fonction du temps.



Quelle est, à t = 20 secondes, la position du mobile ?

III. Fonction du second degré : La parabole

La parabole d'axe vertical en coordonnées cartésiennes, est une fonction dont l'équation explicite est

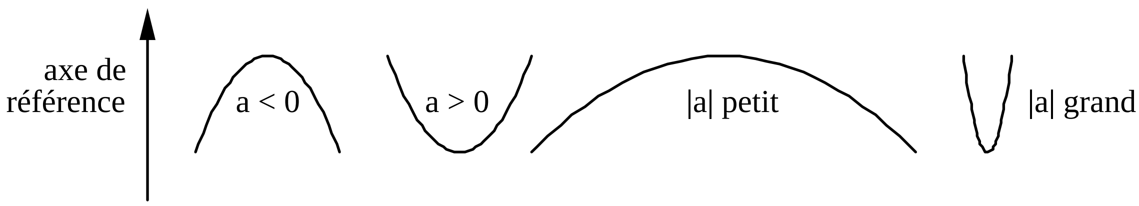
$$\boxed{y = a.x^2 + b.x + c}$$

La parabole est une de ces courbes prestigieuses qui sont connues depuis l'antiquité grecque. Elle fait partie des *coniques*, c'est-à-dire qu'elle peut être obtenue par l'intersection d'un cône avec un plan. Pour obtenir une parabole, il faut que le plan soit parallèle à une génératrice du cône (Apollonius, III^{e}s. av. J.-C.).

La parabole peut également être définie comme une courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point donné (appelé foyer) et d'une droite (appelée génératrice).

Propriétés caractéristiques des paraboles d'équation $y = a.x^2 + b.x + c$:

- Le facteur "a" qui multiplie x^2 détermine la forme générale de la courbe ;
  - si a est négatif, la parabole s'ouvre vers les valeurs négatives de l'axe de référence;
  - si a est positif, elle s'ouvre vers les valeurs positives de l'axe de référence ;
  - la valeur absolue de a donne le degré d'ouverture de la courbe: plus a est grand (en valeur absolue), plus les branches de la parabole sont resserrées.



- La parabole n'a pas d'asymptotes.
- La parabole possède un axe de symétrie vertical d'équation $x = -\frac{b}{2.a}$
- La parabole possède un extremum dont les coordonnées (x , y) sont $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
- La parabole coupe l'axe vertical en x = 0 $\rightarrow$ y = c.
- Si le réalisant **b^2 - 4.a.c est > 0**, la parabole coupe l'axe horizontal en 2 points.

  Ces deux points sont $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ et $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$
- Si le réalisant **b^2 - 4.a.c est = 0**, la parabole touche l'axe horizontal en 1 point.

  Ce point (x , y) est $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$
- Si le réalisant **b^2 - 4.a.c est < 0**, la parabole ne touche jamais l'axe des abscisses.

Exemple

Pour faire la représentation d'une parabole $y = x^2 - 4x + 3$, il faut disposer de quelques points qu'il est intéressant de ne pas choisir hasard.

- Les points où la parabole coupe l'axe des x (dont l'équation est $y = 0$) ;

$$\text{Si } y = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

- Le point où la parabole coupe l'axe des y (dont l'équation est $x = 0$) ;

$$\text{Si } x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

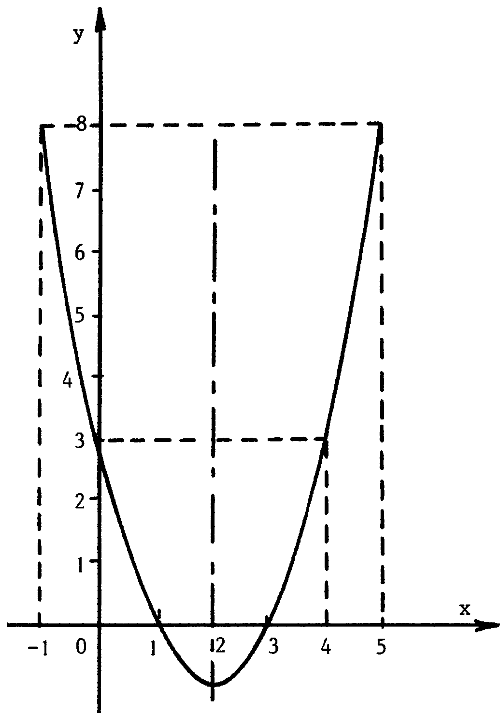
- La courbe étant symétrique, son axe de symétrie passe par $x = \dfrac{1+3}{2} = 2$
- La valeur de l'axe de symétrie se trouve aussi par la relation classique $x = \dfrac{x' + x''}{2} = -\dfrac{b}{2a}$

- La coordonnée y de l'extremum (ici minimum car le coefficient de x² est 1 : valeur positive) s'obtient en remplaçant x par sa valeur dans l'équation $y = x^2 - 4x + 3$.

$$\text{si } x = 2, \; y = 2^2 - 6\ 4.2 + 3 = -1$$

- On calcule d'autres valeurs de y en prenant des valeurs de x symétriques par rapport à 2. Alors que théoriquement 3 points suffisent pour déterminer une parabole, il en faut 5 ou 7 pour avoir une bonne idée de sa représentation.

x	y
1	0
3	0
2	-1
0	3
4	3
-1	8
5	8

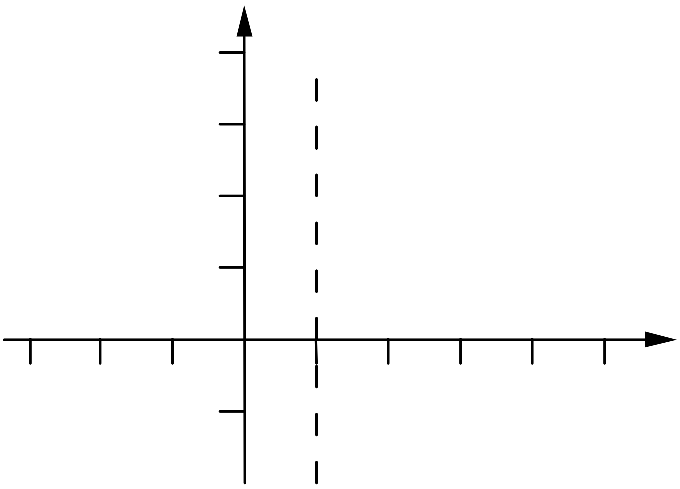


<u>Exercices sur la parabole</u>

1. Représentation de la parabole d'équation $y = 2.x^2 - 4.x - 6$, de $x = -3$ à $x = +5$.

Réponse :
axe de symétrie x =
coordonnées de l'extremum,

x	y
-3	+24
-2	+10
-1	0
0	- 6
1	- 8
2	- 6
3	0
4	+10
5	+ 24



2. La position y d'un mobile en fonction du temps t est donnée par l'équation $y = t^2 - 4t + 3$
   A quel(s) moment(s) le mobile occupe-t-il la position y = 0 ?
   A quel moment le mobile occupe-t-il la position y = extremum ? Que vaut cette position ?
   A quel moment la courbe coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

3. Quel doit être le paramètre b de l'équation $y = 10\,x^2 + bx + 40$ pour que la courbe ne touche jamais l'axe x ?

Réponse : il faut que le réalisant $b^2 - 4.a.c$ soit < 0.

$$b^2 - 4.10.40 < 0$$
$$b^2 < 1600$$
$$-40 < b < 40$$

4. Trouvez l'équation de la parabole qui passe par les 3 points suivants:

x	0	1	3
y	0	50	30

Réponse : il suffit d'établir un système de trois équations à trois inconnues.

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 0$$
$$50 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad \rightarrow \quad 50 = a + b \quad \rightarrow \quad 150 = 3a + 3b$$
$$30 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad \rightarrow \quad 30 = 9a + 3b \quad \rightarrow \quad -\underline{(30 = 9a + 3b)}$$
$$120 = -6a$$

$\rightarrow \quad a = -20$
$\rightarrow \quad b = 70$
$\rightarrow \quad c = 0$

$$y = -20x^2 + 70x + 0$$

5. Calculez les coefficients a, b, c de l'équation $y = ax^2 + bx + c$ dont la courbe représentative passe par les points :

x	-2	1	3
y	10	-8	0

Réponse : $y = 2x^2 - 4x - 6$

6. Le tableau suivant donne quelques positions et les temps correspondants pour un mouvement uniformément accéléré.

t (s)	4	6	8	10
x (m)	50	40	10	-40

Pour un tel mouvement, la position x d'un mobile en fonction du temps est donnée par l'équation :

$$x = x_o + v_o t + \frac{a.t^2}{2} \qquad (v_o = \text{vitesse initiale ; } a = \text{accélération})$$

Que valent x_o, v_o et a ? Quel est l'extremum ?

Attention : ne pas confondre a (coefficient de x^2) et a (accélération). La même lettre peut parfois représenter des choses différentes, cela dépend du contexte!

Réponse : $x = 10 + 20\,t - \frac{5.t^2}{2}$ axe de symétrie pour $t = -\frac{20}{-5} = 4$ s $\rightarrow$ $x = 50$ m

La fonction y=a/x

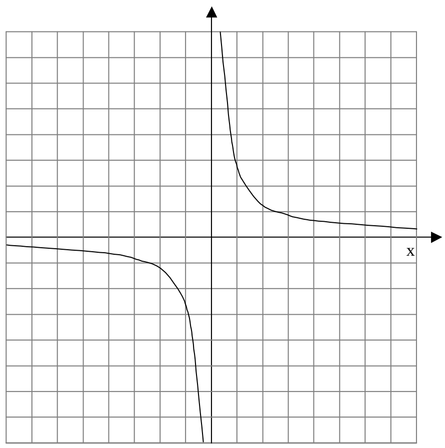
La représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{a}{x} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{y \,.\, x = a}$$

dont la formule ainsi écrite révèle une proportionnalité inverse entre la variable dépendante y et la variable indépendante x est une **hyperbole**.

Lorsque le dénominateur de la fraction s'annule (x = 0), la fonction n'est plus définie. Il y a en ce point une discontinuité. Au voisinage de la discontinuité, la valeur absolue de y devient très grande.

- D'un côté du point x = 0, $y \to +\infty$, de l'autre côté, $y \to -\infty$.
- La droite verticale d'équation x = 0 est une des deux asymptotes de la courbe hyperbolique.
- La seconde asymptote est constituée par la droite horizontale d'équation y = 0



En physique, une des équations hyperboliques les plus connues concerne les gaz parfaits : c'est la loi de Boyle-Mariotte.

$$\boxed{P \,.\, V = \text{constante} \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{c}{V}}$$

Par comparaison avec la forme générale de l'équation, on constate que les paramètres a et b sont nuls. Dans ce cas, l'hyperbole est asymptote aux axes x et y et symétrique par rapport au point (0,0). Ses axes de symétrie sont les bissectrices des angles droits formés par les axes x et y.

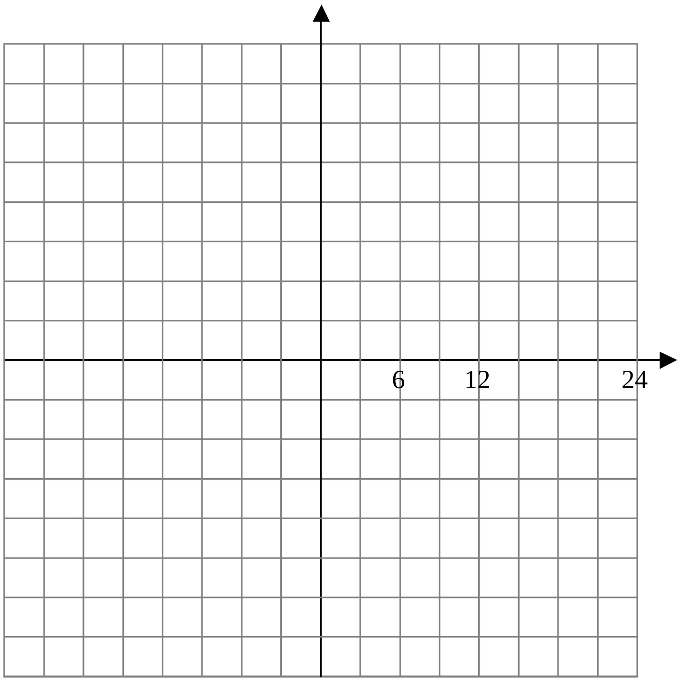
Exercice

1. Dessinez ce type d'hyperbole pour une valeur particulière de la constante, par exemple

$$P \,.\, V = 24$$

Les valeurs de P prévues dans le tableau ont été choisies pour faciliter les calculs.

P	V
-24	-1
-12	-2
-8	-3
-6	-4
-4	-6
-3	-8
-2	-12
-1	-24
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
24	1



Comme des pressions et des volumes négatifs n'existent pas, pour les problèmes de physique, il ne faut considérer que la branche positive de la courbe.

On voit qu'à très forte pression, le volume tend vers 0 tandis qu'il tend vers +I lorsque la pression devient de plus en plus faible. Cette hyperbole tend à se rapprocher indéfiniment des axes x et y mais sans jamais les couper ni les atteindre; elle est asymptote aux axes x et y.

l’ellipse et le cercle

La représentation graphique de la fonction

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une ellipse, la dernière des *coniques*. Elle peut se définir comme une courbe dont chaque point est tel que la somme de ses distances à deux points fixes, appelés foyers, est une constante.

Si a = b = R, l'ellipse est un cercle de rayon R, centré sur l'origine des axes.

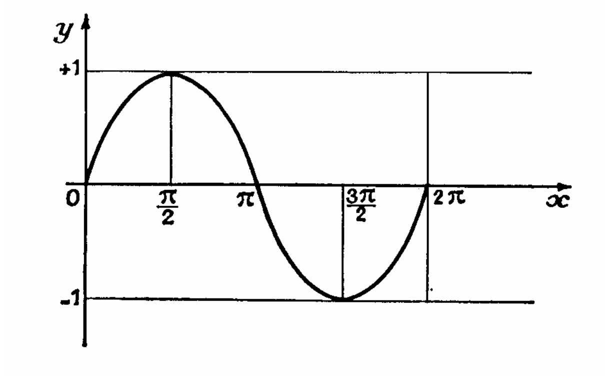
$$x^2 + y^2 = R^2$$

IV. Fonctions trigonométriques

Fonction sinus

La fonction sinus est une fonction continue qui varie entre +1 et –1 et qui s'annule pour toutes les valeurs de nπ où n est un nombre entier valant 0, 1, 2 , …

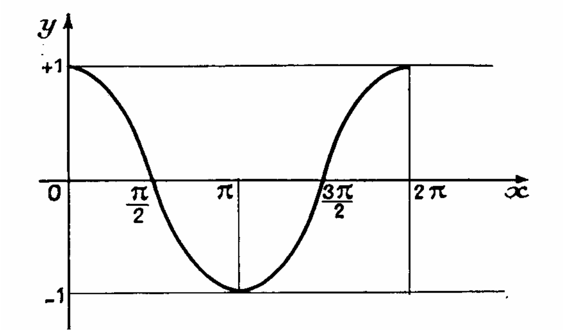
y = sin x



Fonction cosinus

La fonction sinus est une fonction continue qui varie entre +1 et –1 et qui s'annule pour toutes les valeurs de (2n + 1) π/2 où n est un nombre entier valant 0, 1, 2 , …

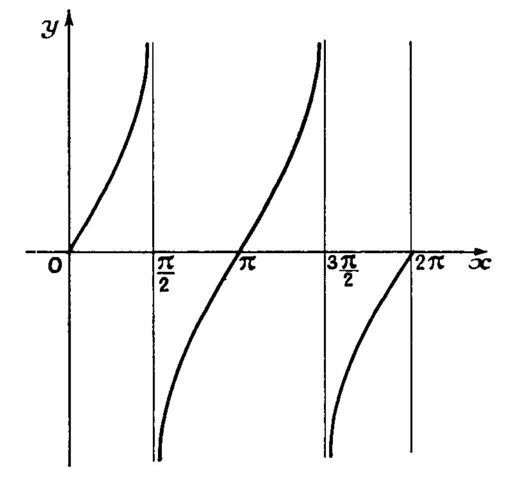
y = cos x



Fonction tangente

La fonction tangente est une fonction qui présente des asymptotes verticales pour les valeurs de $(2n + 1)\,\pi/2$ où n est un nombre entier valant 0, 1, 2 , …

$y = \mathrm{tg}\,x$



V. Fonctions exponentielles et logarithmiques

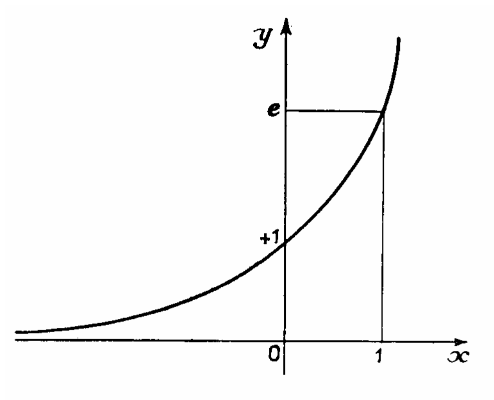
On appelle fonction exponentielle toute fonction du type :

$$y = a^{x}$$

où a est un nombre positif quelconque affecté d'un exposant variable x.

Un cas particulier particulièrement important est la fonction où le nombre entier positif est le nombre irrationnel e = 2,718281828….

$y = e^{x}$

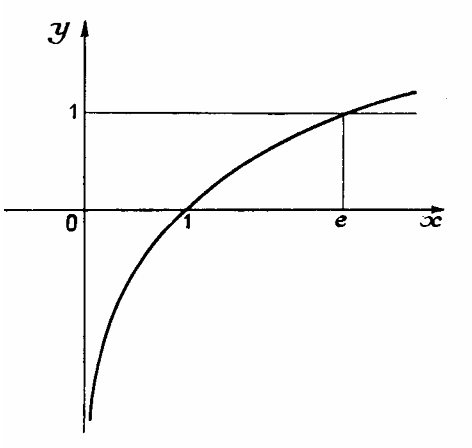


où e est la limite vers laquelle tend l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Etant donné que $\mathbf{y = e^{x}}$ et $\mathbf{x = \ln y}$ sont deux fonctions inverses dire que x est le logarithme népérien de y est tout a fait équivalent à l'expression y est la puissance x du nombre e.

Puisque les fonctions exponentielle et logarithmique sont inverse, il est normal qu'elles soient symétriques.

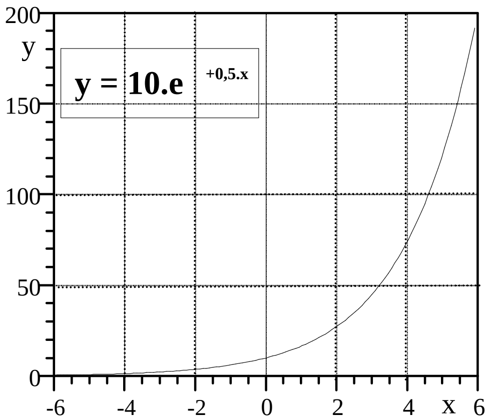
$y = \ln x$

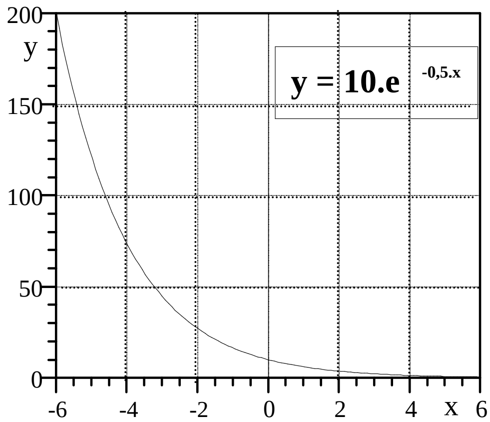


Les plus fréquentes des **fonctions exponentielles** qui sont rencontrées dans les sciences sont de la forme :

$y = k \cdot e^{ax}$ et $y = k \cdot e^{-ax}$

La fonction est croissante ou décroissante selon que l'exposant est positif ou négatif.





$y = k \cdot e^{+ax}$ et $y = k \cdot e^{-ax}$ sont deux courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Elles coupent toutes deux l'axe vertical en un point y = k. (k=10 dans les exemples présentés ci-dessus).

Une des extrémités de la courbe tend vers 0 tandis que l'autre croît rapidement vers l'infini, d'autant plus vite que la valeur absolue de "a" est grande.

Cas particulier de la fonction exponentielle : les courbes de décroissance

L'importance de la courbe de décroissance exponentielle réside dans le fait qu'elle représente l'évolution d'un grand nombre de phénomènes physiques ou biologiques.

Ainsi, le refroidissement par conduction d'un corps chaud obéit à l'équation :

$$\Delta T = \Delta T_O . e^{-\alpha t}$$

dans laquelle ΔT_O est l'excès de température du corps chaud par rapport au milieu environnant à t = 0, ΔT l'excès de température du corps chaud à chaque instant, t le temps et α une constante qui dépend des conditions expérimentales.

Une formule similaire régit la décharge d'un corps électrisé ou d'un condensateur :

$$Q = Q_o.e^{-bt}$$

De même, l'intensité d’un rayonnement diminue exponentiellement avec l'épaisseur de matériau traversé :

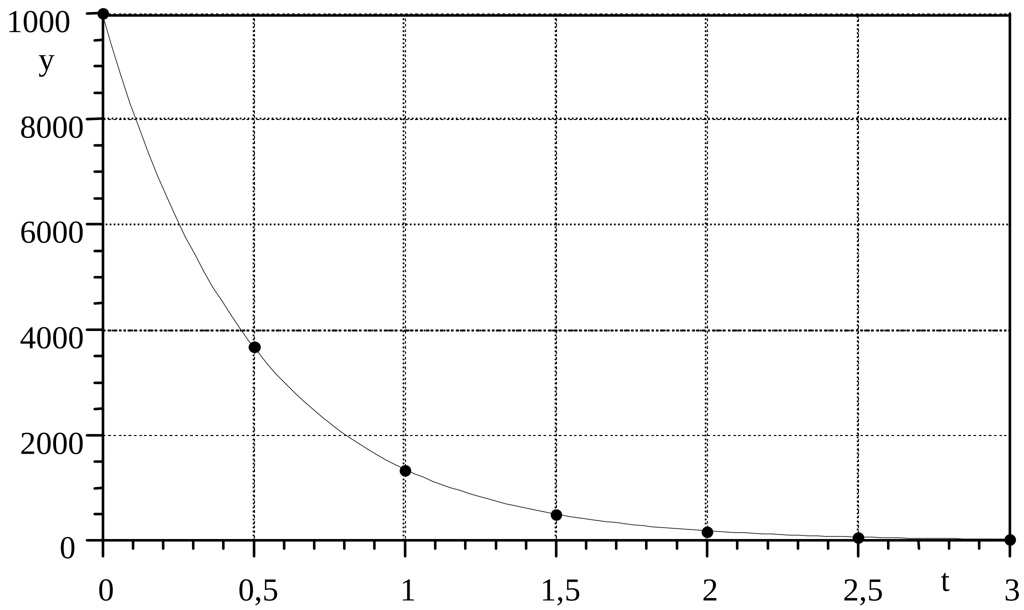
$$I = I_o.e^{-\mu x}$$

Exemple résolu de fonction exponentielle décroissante

Comme exercice, pour les valeurs de t suivantes, calculez et portez sur papier les points qui représenteront l'équation :

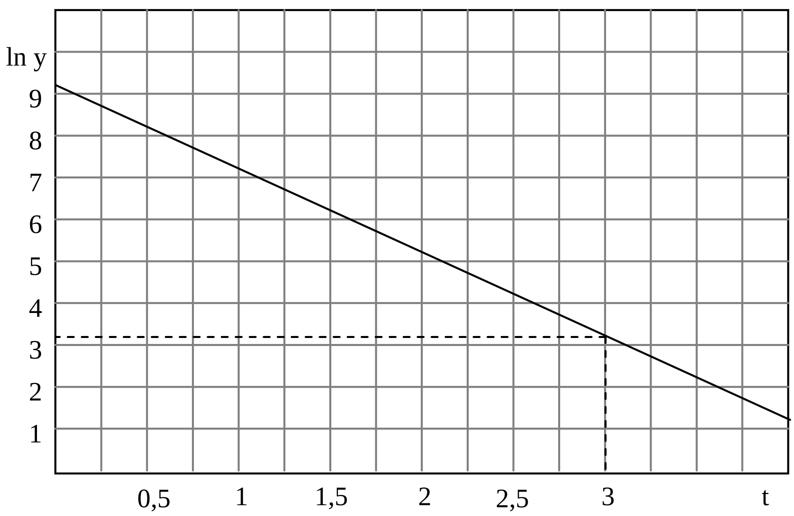
$$y = 10000\,.e^{-2.t}$$

T	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	10000	3679	1353	498	183	67	25



Comme toutes les courbes, celle-ci est assez difficile à manipuler par des procédés graphiques. Il est préférable de la transformer pour en obtenir une représentation linéaire. Pour se faire, On calcule point par point le logarithme népérien des ordonnées et on porte ces valeurs en fonction de l'abscisse.

T	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	10000	3679	1353	498	183	67	25
ln y	9,21	8,21	7,21	6,21	5,21	4,21	3,21



Le graphique obtenu est celui d'une droite, car si :

$$\boxed{y = k.e^{-ax} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln k - ax.}$$

L'ordonnée à l'origine est : ln k = 9,21 = ln 10000

La pente de la droite est : $\frac{\ln y_2 - \ln y_1}{t_2 - t_1} = -a = \frac{3,21 - 9,21}{3 - 0} = -2$

On retrouve ainsi l'équation de la fonction exponentielle décroissante :

$$\boxed{y = 10000 \cdot e^{-2t}}$$

<u>La constante de temps</u>

Lorsque la variable indépendante est le temps, l'équation de décroissance exponentielle possède la forme :

$$\boxed{y = k \cdot e^{-a.t}}$$

La rapidité de la décroissance est conditionnée par la valeur de la constante a.

On appelle "**constante de temps**" ou "temps de relaxation" l'inverse de la grandeur a; on la représente généralement par la lettre grecque τ (tau). τ s'exprime dans la même unité de temps que la variable t (seconde, minute, heure, ...)

L'équation peut s'écrire : $y = k \cdot e^{-t/\tau}$

- Lorsque $t = 0$, $y = k$. C'est la valeur de l'ordonnée à l'origine, souvent notée y_o.

- Lorsque $t = \tau$, c'est-à-dire lorsqu'un temps égal à la constante de temps s'est écoulé, la variable y a décru et ne vaut plus que :

  $$y = k \cdot e^{-t/\tau} = k \cdot e^{-1} = k \cdot 0,37$$

  soit environ 37% de sa valeur initiale. Chaque fois qu'un temps égal à une constante de temps s'écoule, la grandeur y se trouve réduite à 37% de sa valeur précédente.

Après t =	1τ	2τ	3τ	5τ	10τ
y ne vaut plus que	37% de y_o	13,5% de y_o	5% de y_o	0,7% de y_o	0,005% de y_o

Exercices sur les exponentielles

1. Un bloc de métal chauffé à 200°C est mis au contact d'une surface maintenue à 20°C. L'équation donnant l'excès de température du métal par rapport à la température de la surface froide est, en fonction du temps:

$$\boxed{\Delta T = \Delta T_o \, . \, e^{-0,1.t}}$$

ΔT = excès de température du métal par rapport à la surface froide
ΔT_o = valeur initiale de cet excès
t = temps en secondes

Quelle est la température après 10 secondes ? Combien de temps faut-il pour que la température du bloc soit 50°C ?

Réponse :

$\Delta T_o = 180 \quad \rightarrow \quad \Delta T = T - 20° = 180 \, . \, e^{-0,1\,.\,t}$
$\rightarrow \quad \Delta T = T - 20° = 180 \, . \, e^{-0,1\,.\,10} = 66{,}24°$
$\rightarrow \quad T = T - 20° = 66{,}24° + 20° = 86{,}24°$

$\Delta T_o = 180 \quad \rightarrow \quad \Delta T = 50° - 20° = 30 = 180 \, . \, e^{-0,1\,.\,t}$
$\rightarrow \quad \dfrac{30}{180} = e^{-0,1\,.\,t}$
$\rightarrow \quad -\ln 6 = -0{,}1 \, . \, t$
$\rightarrow \quad t = 17{,}92$ s

2. La force (F) qui agit sur un mobile décroît exponentiellement en fonction de la position (x) qu'il occupe suivant l'équation :

$$\boxed{F = F_o \, . \, e^{-a.x}}$$

Au point de départ (x = 0), la force est égale à 10 newtons ; 2 mètres plus loin, la force n'est plus que 3,7 newtons. Quelle est la valeur de la constante "a" dans l'équation de la force en fonction de la position ? Réponse : a = 0,5

3. L'intensité (I) d'un rayonnement lumineux traversant différentes épaisseurs (x) d'une solution de sulfate de cuivre varie selon le tableau suivant :

Epaisseur	0 cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Intensité	100	39	17	5,5	2,7

Quelle est la valeur du coefficient d'atténuation ? Quelle épaisseur ($x_{1/2}$) traverser pour que l'atténuation soit réduite de moitié ? $x_{1/2} = 0{,}74$ cm

B. PHYSIQUE APPLIQUEE AUX METIERS DE L'IMAGE ET DU SON : PREREQUIS

I. Définition de la vitesse et de l'accélération

René Descartes (1596 - 1650) s'est penché sur le problème de la description simple et précise d'un mouvement (cinématique). En observant le vol d'une mouche dans sa chambre, il arriva à la conclusion que la trajectoire suivie par la mouche est une succession de positions instantanées que l'on peut repérer par rapport à un système d'axes de référence dit cartésien.

De même qu'il ne faut pas confondre la **longueur de la trajectoire**, c'est-à-dire la distance parcourue par la mouche avec la **succession des positions** de celle-ci dans la chambre (par rapport au référentiel cartésien), il ne faut pas amalgamer la **durée du vol** avec la **succession des instants** qui correspondent à chaque phase du vol.

Lorsqu'un mobile se déplace linéairement, sa position (x) sur l'axe varie au cours du temps. Le rapport entre la distance parcourue (Δx) et l'intervalle de temps écoulé (Δt) constitue ce qu'on appelle la **vitesse moyenne (v_m)** du mobile. Plus exactement, la vitesse moyenne est égale au quotient de la variation de position ($x_{final} - x_{initial}$) par la variation de temps ($t_{final} - t_{initial}$).

$$\boxed{v_{moyenne} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Les fluctuations éventuelles de la vitesse ne sont cependant pas définies par ce calcul. Pour connaître la vitesse à chaque instant, il faut faire des mesures beaucoup plus fréquentes, c'est-à-dire, diminuer l'intervalle Δt. La **vitesse instantanée (v)** est la limite du rapport $\Delta x/\Delta t$ lorsque Δt tend vers zéro.

Cette définition est précisément celle de la dérivée d'une fonction : **la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.**

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

Lorsqu'on connaît la fonction $x = f(t)$ donnant la position (x) à chaque instant (t), l'application des règle de dérivation fournit une nouvelle fonction $v = f(t)$ qui permet le calcul de la vitesse à n'importe quel moment (t).

D'une façon analogue, on définit l'**accélération moyenne (a_m)** d'un mobile sur un axe comme étant le rapport entre l'accroissement de la vitesse (Δv) et l'intervalle de temps (Δt) pendant lequel on a mesuré cet accroissement.

$$\boxed{a_{moyenne} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Pour connaître l'**accélération instantanée (a)**, il faut réduire l'intervalle Δt à la valeur la plus petite possible. On obtient l'accélération à chaque instant en calculant la limite du rapport $\Delta v/\Delta t$ lorsque Δt tend vers zéro. **L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.**

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

Puisque d'autre part, $v = \dfrac{dx}{dt}$

on a $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

L'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

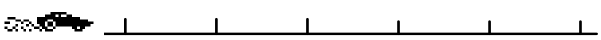
$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

La caractéristique du mouvement de translation est d'être rectiligne, c'est-à-dire de suivre une droite. En conséquence, dans le mouvement rectiligne, il n'est pas nécessaire d'utiliser les quatre paramètres pour caractériser un vecteur. En effet, il n'y a plus besoin de définir la direction puisqu'elle est imposée par le mouvement lui-même. **Si on fait le choix d'un sens conventionnel, on peut décider qu'un vecteur de même sens que l'axe de référence est positif et qu'un vecteur de sens contraire est négatif.**

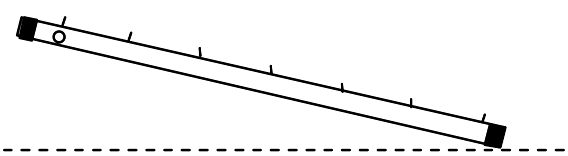
De façon générale, on définit un vecteur par: - sa direction - son sens - son point d'application - sa grandeur	Si on choisit un axe de référence et son origine, on définit un vecteur par: - sa grandeur - son signe **C'est cette convention qui sera suivie en cinématique**

II. Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une **vitesse constante tout au long du déplacement et donc une accélération nulle**. Ce mouvement est celui, par exemple, d'une voiture qui roule en palier et dont l'aiguille du tachymètre reste fixée sur une valeur constante.



C'est aussi le mouvement d'une bille qui tombe dans un tube en verre rempli d'eau. Pour modifier la vitesse de la bille, on peut changer l'inclinaison du tube.

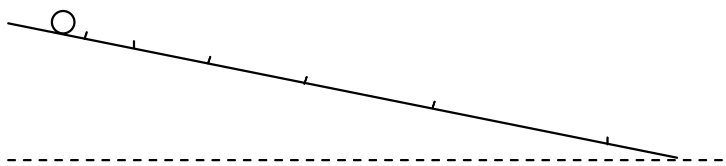


L'analyse du MRU montre que des espaces égaux sont parcourus en des durées égales. La vitesse instantanée est toujours la même et est égale à la vitesse moyenne. Les équations du mouvement rectiligne uniforme sont:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 0 \\ v &= v_m = \text{constante} \\ x &= x_0 + vt \end{aligned}}$$

III. Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Le mouvement rectiligne uniformément accéléré est caractérisé par une accélération constante tout le long du déplacement. Ce mouvement est celui, par exemple, d'une bille qui roule le long d'un plan incliné ou d'un mobile sur un rail à coussin d'air incliné par rapport à l'horizontale.



L'analyse du MRUA montre qu'à des durées égales ne correspondent pas des espaces égaux. On ne peut donc plus considérer la vitesse instantanée comme égale à la vitesse moyenne.

Par contre, on peut constater que les déplacements, correspondant à des durées égales, augmentent de façon régulière. Le mouvement est donc accéléré et une étude plus approfondie montre que cette **accélération est constante** pendant tout le mouvement. (On observe, en effet, une proportionnalité directe entre les positions de la bille et le carré des durées pour arriver à ces positions). L'accélération instantanée est donc à tout moment égale à l'accélération moyenne.

Les équations du mouvement rectiligne uniformément accéléré sont :

$$\boxed{\begin{aligned} a &= a_m = \text{constante} \\ v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}}$$

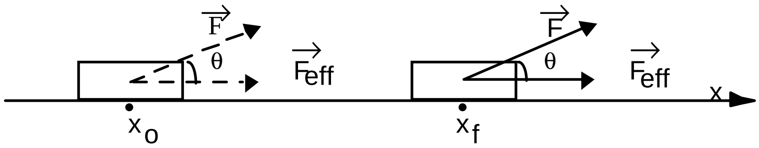
IV. La notion de travail

Le travail musculaire qui donne une sensation subjective de fatigue ne peut pas faire comprendre la notion de travail qui fut introduite par René Descartes (1596-1650). En physique, on parlera de travail chaque fois qu'une force appliquée à une masse provoque un déplacement de celle-ci. Comme le travail est une grandeur qui n'implique aucune notion de direction, le travail est une grandeur scalaire. Il se définit comme étant le produit scalaire de la force par le déplacement:

$W = F_{eff} \cdot \Delta x$ (F_{eff} = force efficace ; Δx = déplacement)

La force efficace est la composante de la force dans la direction du déplacement.
($F_{eff} = F.\cos\theta$)

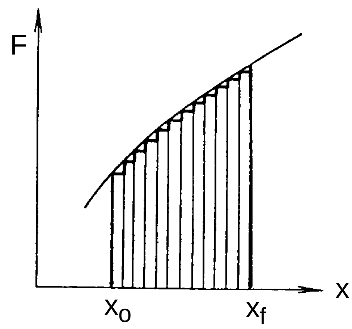
Si la force est orientée comme le déplacement, on parle de **travail moteur**. Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail est nul. Si la force est orientée en sens inverse du déplacement, on parle de **travail résistant**.



Si la force est constante, le problème est élémentaire, mais si la force varie pendant le déplacement, on peut décomposer le vecteur déplacement en une somme de déplacements élémentaires pendant lesquels on peut considérer la force comme constante et ainsi calculer le travail élémentaire. Le travail total sera la somme des travaux élémentaires.

$$W = \Sigma F_i \cdot \Delta x$$

Dans un graphique qui donne la force en fonction de la position, le calcul du travail revient toujours, sur papier, à un calcul de surface. La mesure du travail sera égale à la mesure de la surface comprise sous la courbe donnant la force en fonction de la position entre la position initiale (x_o) et la position finale (x_f).



Cette façon de calculer le travail revient à faire du calcul intégral. Le travail est, en effet, l'intégrale définie de différentielle F . dx depuis la position initiale jusqu'à la position finale.

$$W = \int_{x_o}^{x_f} F \cdot dx$$

Le travail est ainsi défini comme étant la différence entre deux valeurs d'une fonction primitive. Le résultat obtenu est un nombre, car k, x_2 et x_1 sont des grandeurs numériques, tandis que le résultat d'une primitivation était une fonction.
Il faut aussi signaler que la constante d'intégration arbitraire disparaît puisque le résultat est obtenu par soustraction. Dans le calcul des intégrales définies, il n'y a pas de constante à ajouter au résultat.

Définie en hommage à James Prescott Joule (1810 - 1889), l'**unité de travail est le joule** (J). Une force de 1 newton qui déplace son point d'application de un mètre dans sa direction effectue un travail de 1 joule.

$$\boxed{1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ mètre}}$$

L'unité CGS de travail est l'erg qui vaut 10^{-7} J.

V. La notion d'énergie

L'énergie est du travail "en conserve". **Pour une masse, l'énergie est sa capacité d'effectuer un travail.** Comme le travail, l'énergie est une grandeur scalaire.

La mesure de l'énergie se fait en mesurant le travail effectué. Les unités d'énergie sont donc identiques à celles du travail.

Comme pour l'œuf et la poule, on peut se demander qui est à l'origine de l'autre? La réponse est impossible, car il faut effectuer un travail pour stocker l'énergie, mais il faut consommer de l'énergie pour effectuer un travail.

L'énergie se trouve sous de nombreuses formes: calorifique, chimique, lumineuse, nucléaire, électrique, éolienne, marée-motrice, mécanique ... En mécanique, on distingue, entre autres, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle d'élasticité, l'énergie de déformation…

VI. La notion de puissance

La puissance est une grandeur qui tient compte de la durée nécessaire pour effectuer un travail déterminé.

La puissance est le rapport du travail effectué sur la durée de ce travail

Comme pour la vitesse et l'accélération, on définit une **puissance moyenne (P_m)** : rapport du travail total à la durée totale pour l'effectuer.

$$\boxed{P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

et une **puissance instantanée (P)** ou simplement **puissance** est la limite du rapport du travail effectué (ΔW) à la durée correspondante (Δt) lorsque celle-ci tend vers zéro. C'est donc la dérivée du travail par rapport au temps

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{158.4}{2.5} = \frac{dW}{dt}}$$

Définie en hommage à James Watt (1736 - 1819), l'unité SI de puissance est le **watt** (W). Le watt est la puissance nécessaire pour effectuer un travail de 1 joule par seconde. Il existe une unité pratique qui n'est plus légale mais qui a encore court actuellement le **cheval-vapeur** (CV) qui correspond à 736 watts.

Le **kilowatt-heure** (kWh) des factures d'électricité n'est pas une unité de puissance mais bien d'énergie, multiple du joule : 1 kWh = 1 000 W x 3 600 s = $3{,}6.10^6$ J

VII. Machines simples

Les machines simples sont des systèmes au moyen desquels on peut modifier les paramètres d'un travail mécanique en changeant soit la direction, soit la grandeur de la force.

Les machines simples les plus courantes sont le levier, le plan incliné, la poulie, les engrenages, ...

Si on néglige le frottement, une machine simple rend un travail identique à celui qu'elle a reçu. On y retrouve appliqué **le principe de la conservation de l'énergie**. Le gain au niveau de la force (augmentation de la force) est exactement compensée par une perte au niveau du déplacement du point d'application (allongement du déplacement).

Dans la réalité, il y a toujours du frottement qui provoque un échauffement des corps en contact. Le travail transmis est toujours inférieur au travail reçu. Le rendement (η) de la machine est le rapport du travail transmis sur le travail reçu.

$$\eta = \frac{\text{travail transmis}}{\text{travail reçu}}$$

VIII. Intensité électrique en courant continu (DC)

Le courant électrique est constitué de charges négatives qui se déplacent dans un conducteur. L'intensité électrique (I) est la variation de charge (ΔQ) qui passe à travers une section du conducteur par unité de temps (Δt).

$$I = \Delta Q/\Delta t$$

L'unité d'intensité est l'ampère. La mesure de l'intensité dans un circuit se fait au moyen d'un ampèremètre que l'on place **en série** dans le circuit.

IX. Différence de potentiel en courant continu (DC)

Si un courant électrique traverse une résistance, il y a une consommation d'énergie qui se traduit par une chute de potentiel aux bornes de la résistance. La différence de potentiel (U_{AB}) entre deux points d'un circuit définit le travail (W_{AB}) nécessaire pour déplacer une charge unitaire (q) d'un point A à un point B. La différence de potentiel aux bornes d'un générateur représente donc l'énergie électrique que peut fournir ce générateur.

$$U_{AB} = W_{AB} /q$$

La différence de potentiel se mesure en volt (V). On la détermine au moyen d'un voltmètre que l'on connecte **en parallèle** aux deux points entre lesquels on veut mesurer la différence de potentiel.

La loi d'Ohm permet de déterminer la chute de potentiel qui se produit lorsque le courant traverse une résistance.

$$U_{AB} = R_{AB} \, . \, I_{AB}$$

La résistance (R_{AB}) de la portion de circuit comprise entre les points A et B est le facteur de proportionnalité qui lie la tension au courant. Elle se mesure en ohm (Ω).

X. Résistance

En courant continu, la grandeur qui caractérise un circuit est sa résistance. La loi de Pouillet montre que la résistance d'un conducteur cylindrique est proportionnelle à la longueur (l) du conducteur et inversement proportionnelle à sa section (S).

$$R = \rho \, . \, l \, / \, S$$

Le coefficient de proportionnalité est la résistivité (ρ). Cette dernière dépend de la nature du conducteur et varie avec la température. Par exemple la résistivité du cuivre à 20° C est de $1{,}59 \, . \, 10^{-8}$ Ωm. La résistance d'un conducteur de cuivre de 1 km de long et de 1,5 mm^2 de section est donc de 10,6 Ω. Pour une section de 4 mm^2 , la résistance est 4 Ω. Puisque les fils électriques possèdent une résistance, on y observera une chute de potentiel chaque fois qu'ils seront traversés par un courant. Par exemple si un appareil électrique est relié à une source de courant par une ligne d'une certaine longueur, la différence de potentiel aux bornes de l'appareil sera plus faible qu'aux bornes de la source à cause de la chute de tension dans les conducteurs de la ligne.

La résistivité et donc la résistance sont fonction de la température. Ainsi la résistance du filament de tungstène d'une lampe domestique à incandescence de 60 W vaut 807 Ω lorsque la lampe est en fonctionnement normal c'est à dire lorsqu'elle est branchée sur une tension dite nominale de 230 V. Elle se trouve alors à la température de 2400° C. Si la lampe n'est pas sous tension, elle n'est traversée par aucun courant et est donc à température ordinaire. Sa résistance vaut alors 50 Ω, soit 16 fois moins qu'en fonctionnement normal.

XI. Energie et puissance électrique en courant continu

L'énergie électrique (W) se mesure en joules (J) ou en kilowattheures (kWh) (1 kWh = 3.600.000 J).

$$W = U.I.t = \frac{U^2}{R}.t = R.I^2 . t$$

Si un courant traverse une résistance (ou un conducteur résistif), celle-ci va s'échauffer par effet Joule. Un conducteur de section donnée ne pourra donc être traversé que par un courant limité si on désire qu'il ne s'échauffe pas trop (voir à ce sujet le paragraphe sur les conséquences de l'effet Joule page 8).

La puissance électrique (P) est l'énergie par unité de temps. Suivant le point de vue, on parle de la puissance fournie par le générateur ou de la puissance consommée par les résistances du circuit.

$$P = U . I$$

L'indication de puissance que l'on trouve sur une lampe est une valeur dite nominale, c'est à dire qu'elle n'est correcte que lorsque la lampe est branchée sur la valeur nominale de tension. Dans ce cas et seulement dans ce cas, la puissance électrique réellement dissipée a la même valeur que la puissance nominale. En cas de surtension (ou de sous-tension), la puissance réelle sera plus (ou moins) élevée.

INTENSITE NECESSAIRE POUR ASSURER UNE PUISSANCE DETERMINEE

La relation précédente permet de calculer l'intensité qui sera nécessaire en courant continu pour assurer une puissance déterminée (P) en fonction de la différence de potentiel (U) fournie par le générateur.

$$I = \frac{P}{U}$$

XII. Courant alternatif (AC)

Pour des raisons de facilités de fabrication, de transformation et de transport, le courant distribué par le réseau électrique est du courant électrique triphasé. La tension alternative de service 230 V sera donc obtenue à partir d'un réseau 3x400 V + N ou 3x230 V. En effet, en Belgique depuis le début des années 1990, la tension de service est passée de 220 V à 230 V. Depuis 2003, cette norme européenne est d'application.

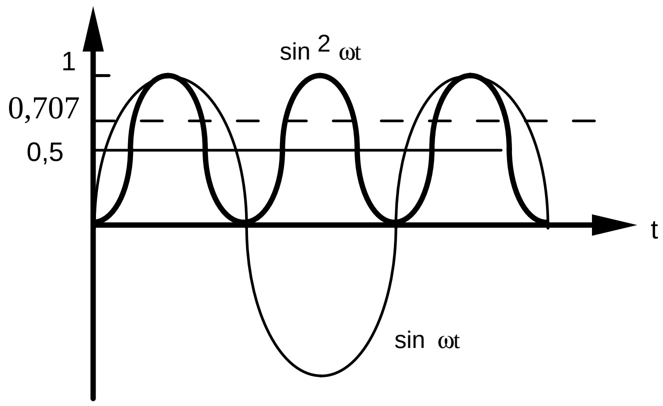
Puisque le courant est alternatif, les lois du courant continu doivent être aménagées pour tenir compte du fait que **la tension et le courant peuvent ne pas être en phase.**

VALEURS EFFICACES

Etant donné qu'en courant alternatif, les valeurs de la tension et du courant changent à tout moment, il est naturel d'en chercher la valeur moyenne. Mais comme celle-ci est nulle mathématiquement, les valeurs représentatives du courant alternatif sont les **valeurs quadratiques moyennes** des grandeurs (en anglais, root mean square dont les initiales sont:

RMS). On peut montrer que la valeur efficace du courant (I) est égale à 0,707 fois la valeur maximum (I_{max}):

$$I = 0,707 . I_{max}$$



de même, pour la valeur quadratique de la tension (E):

$$E = 0,707 . E_{max}$$